Tcomp **Pique-nique n ° 7**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème : **1)** 7 pts **2)** 13 pts

Nom :

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Une maladie épizootique s'est développée dans un cheptel bovins . Un zoologiste a modélisé le nombre de têtes atteintes par cette maladie t jours après l'apparition de celle-ci, par $\mathrm{N}(t)=30t^2-t^3$ pour $0\leqslant t\leqslant 30$

1) Calculer et interpréter le nombre : $\frac{1}{10}\int_0^{10}\mathrm{N}(t)\,\mathrm{d}\,t$

2) Déterminer le jour où il y a le maximum de bovins malades.

3) Calculer le nombre moyen de bovins malades entre le 15ème et le 25ème jour.

Ex 2 : f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$

1) En étudiant les variations de f , montrer que pour tout réel x de [0;1], $\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$ (1)

2) Soit $\mathrm{I}=\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

a) Vérifier que la fonction H, définie par $\mathrm{H}(x)=(-x-3)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction h , définie par $h(x)=(2+x)\mathrm{e}^{-x}$

b) Calculer I . (valeur exacte)

c) En utilisant l'égalité (1), montrer que $\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}\leqslant \mathrm{J}\leqslant \frac{1}{6}$.

d) Démontrer que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(\mathrm{I}+\mathrm{J})$

e) En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.

Rébus :

Correction :

1) $\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_0^{10} \mathrm{N}(t)\, \mathrm{d}\, t = \dfrac{1}{10}\left[10t^3-\dfrac{t^4}{4}\right]_0^{10} = \dfrac{7500}{10} = 750$

Le nombre moyen de bovins malades jusqu'au 10ème jour est 750

2) N est une fonction polynôme, donc dérivable sur [0;30].
Pour tout t ∈ [0;30], on a $N'(t)=60t-3t^2=3t(20-t)$
$N'(t)$ est un trinôme du second degré de racines 0 et 20 et tel que $a<0$.

t	0		20		30
$N'(t)$	0	+	0	-	
N		↗		↘	

Le maximum de bovins malades est le 20ème jour.

3) $\dfrac{1}{10}\displaystyle\int_{15}^{25} \mathrm{N}(t)\, \mathrm{d}\, t = \dfrac{1}{10}\left[10t^3-\dfrac{t^4}{4}\right]_{15}^{25} = \dfrac{37500}{10} = 3750$

Ex 2 :

1) f est dérivable sur [0;1] par opération sur les fonctions dérivables.
Pour tout x de [0;1], on a … : $f'(x)=\dfrac{(x-1)\mathrm{e}^{-x}}{(x-2)^2}$ et $f'(x)\leqslant 0$
Donc f est décroissante sur $[0;1]$. Ainsi :

$0\leqslant x\leqslant 1 \quad\Rightarrow\quad f(1)\leqslant f(x)\leqslant f(0) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2}$

2) a) $\mathrm{H}'(x)=(-x-3)'\mathrm{e}^{-x}+(-x-3)(\mathrm{e}^{-x})'=-\mathrm{e}^{-x}-(-x-3)\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-x}+(x+3)\mathrm{e}^{-x}=(2+x)\mathrm{e}^{-x}$

b) $\mathrm{I}=[\mathrm{H}(x)]_0^1=-4\mathrm{e}^{-1}+3=3-4\mathrm{e}^{-1}$

c) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x^2}{\mathrm{e}}\leqslant x^2 f(x)\leqslant\dfrac{x^2}{2}$

En intégrant cette inégalité positive, on obtient :

$\displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2}{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}\,x \leqslant \mathrm{J} \leqslant \int_0^1 \dfrac{x^2}{2}\,\mathrm{d}\,x \quad\Rightarrow\quad \left[\dfrac{x^3}{3\mathrm{e}}\right]_0^1\leqslant\mathrm{J}\leqslant\left[\dfrac{x^3}{6}\right]_0^1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{3\mathrm{e}}\leqslant\mathrm{J}\leqslant\dfrac{1}{6} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}\leqslant\mathrm{J}\leqslant\dfrac{1}{6}$

d) $\dfrac{1}{4}(\mathrm{I}+\mathrm{J}) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{1}{4}\int_0^1 \dfrac{(4-x^2)\mathrm{e}^{-x}}{2-x}+\dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{1}{4}\int_0^1 \dfrac{4\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$

e) On a : $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}\leqslant\mathrm{J}\leqslant\dfrac{1}{6}$ et $\mathrm{I}=3-4\mathrm{e}^{-1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}\leqslant\mathrm{J}\leqslant\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-1}+3-4\mathrm{e}^{-1}\leqslant\mathrm{I}+\mathrm{J}\leqslant\dfrac{1}{6}+3-4\mathrm{e}^{-1}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{-11}{3}\mathrm{e}^{-1}+3\leqslant\mathrm{I}+\mathrm{J}\leqslant\dfrac{19}{6}-4\mathrm{e}^{-1}$

$\Rightarrow \quad -\dfrac{11}{12}\mathrm{e}^{-1}+\dfrac{3}{4}\leqslant\dfrac{\mathrm{I}+\mathrm{J}}{4}\leqslant\dfrac{19}{24}-\mathrm{e}^{-1}$

$-\dfrac{11}{12}\mathrm{e}^{-1}+\dfrac{3}{4} \approx 0.41$ et $\dfrac{19}{24}-\mathrm{e}^{-1} \approx 0.42$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x \approx 0{,}41$