Tcomp **Devoir surveillé n ° 4**

- Durée 1h
- Calculatrices autorisées

Barème : **1)** 10 pts **2)** 10	**Nom :**

Ex 1 : Répondre à chacune des questions suivantes **en détaillant** les calculs :

1	Déterminer la fonction réciproque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$	
2	Résoudre l'équation suivante : $(e^{x}-5)(e^{3x}-8)=0$	
3	Calculer : $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{3}{x}-e\ln x$	
4	Déterminer le plus petit entier n tel que : $7\times\left(\frac{5}{9}\right)^{n}<0,01$	
5	Résoudre l'équation suivante : $\ln(5x+2)\geqslant\ln(4-x)$	

Ex 2 : On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.
Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie.
Cette fonction f est définie sur [1 ; 26] par : $f(t)=12t\ln(t)-\frac{3}{2}t^2+5$ où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

2) a) Déterminer la fonction dérivée f'' de la fonction f'.

b) Déterminer le tableau de variation de la fonction f' sur l'intervalle [1;26]

c) Montrer que l'équation $f'(t)=0$ admet, dans l'intervalle [1;26], une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.

d) En déduire le signe de $f'(t)$ sur [1;26] et les variations de f sur [1;26].

3) Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.
a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur [4 ; 26], f' est décroissante. »

b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Correction :

Ex 1 : Répondre à chacune des questions suivantes en détaillant les calculs :

1	Déterminer la fonction réciproque de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x-5$	$y=3x-5 \Leftrightarrow 3x=y+5$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}y+\frac{5}{3}$ On obtient $f^{-1}:x\longmapsto \frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$
2	Résoudre l'équation suivante : $(e^x-5)(e^{3x}-8)=0$	$(e^x-5)(e^{3x}-8)=0 \Leftrightarrow e^x=5$ ou $e^{3x}=8$ $\Leftrightarrow x=\ln(5)$ ou $3x=\ln(8)$ $\Leftrightarrow x=\ln(5)$ ou $3x=3\ln(2)$ $\Leftrightarrow x=\ln(5)$ ou $x=\ln(2)$ D'où l'ensemble S des solutions de l'équation de départ : $S=\{\ln(2);\ln(5)\}$
3	Calculer : $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{3}{x}-e\ln x$	$\lim\limits_{x\to+\infty}-3x-e\ln x=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{3}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0+}-e\ln x=+\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{3}{x}-e\ln x=+\infty$
4	Déterminer le plus petit entier n tel que : $7\times\left(\frac{5}{9}\right)^n<0{,}01$	$7\times\left(\frac{5}{9}\right)^n<0{,}01 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n<\frac{0{,}01}{7}$ $\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{5}{9}\right)^n\right)<\ln\left(\frac{0{,}01}{7}\right)$ $\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{5}{9}\right)<\ln\left(\frac{0{,}01}{7}\right)$ $\Leftrightarrow n>\frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{7}\right)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$ (car $\ln\left(\frac{5}{9}\right)<0$) Or $\frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{7}\right)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}\approx 11{,}15$ Donc n=12
5	Résoudre l'équation suivante : $\ln(5x+2)\geqslant\ln(4-x)$	L'équation n'a de sens que pour : $\begin{cases}5x+2>0\\4-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\frac{2}{5}\\x<4\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]-\frac{2}{5};4\right[$ Pour $x\in\left]-\frac{2}{5};4\right[$, on a : $\ln(5x+2)\geqslant\ln(4-x) \Leftrightarrow 5x+2\geqslant 4-x \Leftrightarrow 6x\geqslant 2 \Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{3}$ L'ensemble des solutions est $S=\left[\frac{1}{3};4\right[$

Ex 2 :

1) $f'(t)=12\ln(t)-3t+12$

2) a) $f''(t)=\dfrac{12}{t}-3$

b) Sur [1;26], on a :

$\dfrac{12}{t}-3>0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{12}{t}>3 \quad\Leftrightarrow\quad 4>t$

t	1		4		26
$f''(t)$		+	0	-	
f'	9	$\nearrow$	$24\ln(2)$	$\searrow$	12ln(26)-66

12ln(26)-66 ≈ -26,9

c) Pour tout $x\in[1;4]$, $f'(x)\geqslant 9>0$. Donc l'équation $f'(x)=0$ n'admet pas de solution sur $[1;4]$

f' est continue et strictement décroissante sur $[4;26]$.

$0\in[f'(26);f'(4)]$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f'(x)=0$ admet une unique solution sur $[4;26]$

On trouve 14 < α < 15.

d)

Du tableau de variations, on peut déduire que $f'(t)>0$ sur $[1;\alpha[$ et que $f'(t)<0$ sur $]\alpha;26]$.

Donc la fonction f
- est strictement croissante sur $[1;\alpha]$;
- est strictement décroissante sur $[\alpha;26]$;
- atteint un maximum pour $x=\alpha$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

a. L'expression mathématique suivante : « sur $[4\,;\,26]$, f' est décroissante » signifie que sur cet intervalle, la vitesse de propagation de la maladie diminue.

b. Le nombre de malades par semaine commence à diminuer quand la vitesse de propagation devient négative, donc quand $f'(t)$ devient négatif, c'est-à-dire pour $t>\alpha$; donc il s'est écoulé 14 semaines avant que le nombre de malades par semaine commence à diminuer.