Tcomp **Devoir surveillé n ° 6**

- Durée 1h
- Calculatrices autorisées

Barème : 1) 6 pts 2) 5 2) 9	**Nom :**

Ex 1 : Une maladie épizootique s'est développée dans un cheptel bovins . Un zoologiste a modélisé le nombre de têtes atteintes par cette maladie t jours après l'apparition de celle-ci, par $\mathrm{N}(t)=30t^2-t^3$ pour $0\leqslant t\leqslant 30$

1) Calculer et interpréter le nombre : $\frac{1}{10}\int_0^{10}\mathrm{N}(t)\,\mathrm{d}\,t$

2) Déterminer le jour où il y a le maximum de bovins malades.

3) Calculer le nombre moyen de bovins malades entre le 15ème et le 25ème jour.

Ex 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I}=[0;5]$ par $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$

1) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$

2) En déduire $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$ (Pour cette question, vous pouvez utiliser $a=1$ et $b=-1$)

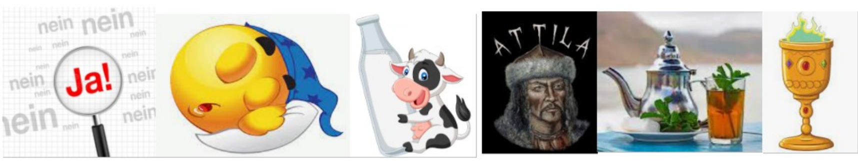
<u>Ex 3 :</u> Calculer :

1) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$

2) $\int_1^2 \left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$

3) $\int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^4+6}}\mathrm{d}u$

Rébus :



Correction :

Ex 1 :

1) $\dfrac{1}{10}\int_0^{10} \mathrm{N}(t)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{1}{10}\left[10\,t^3-\dfrac{t^4}{4}\right]_0^{10} = \dfrac{7500}{10}=750$

Le nombre moyen de bovins malades jusqu'au 10ème jour est 750

2) N est une fonction polynôme, donc dérivable sur [0;30].
Pour tout $t \in [0;30]$, on a $N'(t)=60t-3t^2=3t(20-t)$
$N'(t)$ est un trinôme du second degré de racines 0 et 20 et tel que $a<0$.

t	0		20		30
$N'(t)$	0	+	0	-	
N		$\nearrow$		$\searrow$	

Le maximum de bovins malades est le 20ème jour.

3) $\dfrac{1}{10}\int_{15}^{25} \mathrm{N}(t)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{1}{10}\left[10\,t^3-\dfrac{t^4}{4}\right]_{15}^{25} = \dfrac{37500}{10}=3750$

Ex 2 :

1) Pour tout $x\in[0;5]$, on a : $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+2a+b}{(x+1)(x+2)}$

En identifiant avec $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, on obtient :

$$\begin{cases} a+b=0\,(L_1) \\ 2a+b=1\,(L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0\,(L_1) \\ a=1\,(\mathrm{L}_2 \leftarrow L_2-L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

D'où $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$

2) On calcule ensuite

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^5\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^5 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^5 \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x$$

D'où

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x=[\ln(x+1)]_0^5-[\ln(x+2)]_0^5=\ln 6-\ln 7+\ln 2=\ln\left(\frac{12}{7}\right)$$

Ex 3 :

1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x}\ln(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{1}{2}(\ln 2)^2-\frac{1}{2}(-\ln 2)^2=0$

2) $\displaystyle\int_1^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t=1+\int_2^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=1+2[\sqrt{t}]_2^1=3-2\sqrt{2}$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^4+6}}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}[\sqrt{u^4+6}]_1^2=\frac{1}{2}(\sqrt{22}-\sqrt{7})$