Texp **Pique-nique n°2**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

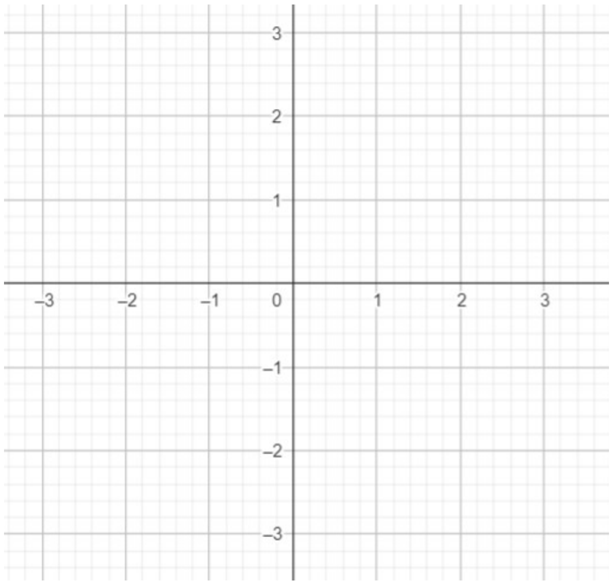
Barème :	**Nom :**
1) 6 pts **2)** 4 pts **3)** 6 pts **4)** 4 pts	

Répondre sur cette feuille

Dans tout le pique-nique, on se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Ex 1 : Soit A, B et C les points d'affixes $a=\sqrt{3}+i$, $b=ia$ et $c=ib$

1) a) Démontrer que A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.



b) Ecrire b et c sous forme algébrique.

c) Que peut-on dire des points A et C ?

d) Placer précisément ces trois points dans le plan complexe.

2) a) Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en B

c) Déterminer l'affixe de D tel que ABCD soit un carré.

Ex 2 : Dans chacun des cas, déterminer géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie

1) $|z-6-4i|=i^6$

2) $|z+2-i|=|z-5-2i|$

3) $|iz-1|=5$

<u>Ex 3 :</u> 1) En posant $z=x+iy$, écrire $(\bar{z}-3i)(1+z)$ sous forme algébrique.

2) Déterminer dans chacun des cas l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

1) $(\bar{z}-3i)(1+z) \in i\mathbb{R}$

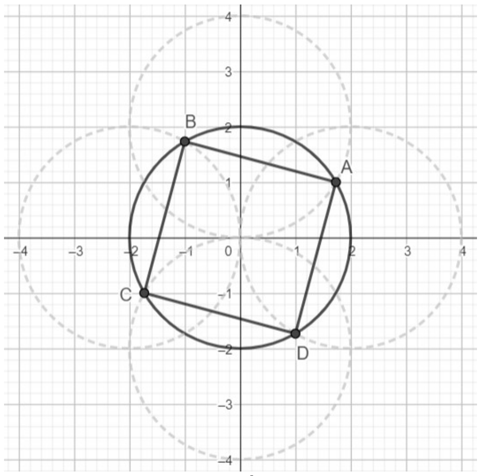
2) $(\bar{z}-3i)(1+z) \in \mathbb{R}$

<u>Ex 4 :</u> Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique.

1) $z_1=-3\sqrt{3}+9i$

2) $z_2=-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Correction :



Ex 1 : 1) a) $|a|=|\sqrt{3}+i|=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2$, $|b|=|ia|=|i||a|=1\times 2=2$ et $|c|=|ib|\equiv|i||b|=1\times 2=2$

Donc A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2

b) $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=-\sqrt{3}-i$

c) $c=-a$, donc A et C sont symétriques par rapport au point O.

d)

2) a) $z_{\overline{AB}}=b-a=-1-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$ $z_{\overline{BC}}=c-b=1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})$ $z_{\overline{AC}}=c-a=-2\sqrt{3}-2i$

b) $AB=|b-a|=2\sqrt{2}$, $BC=|c-b|=2\sqrt{2}$ et $AC=|c-a|=4$

$AC^2=AB^2+BC^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore ABC est rectangle en B et comme AB=BC, il est aussi isocèle en B.

c) ABCD est un carré de centre O milieu de [AC], donc D est le symétrique de B par rapport à O et D a pour affixe $-b=1-i\sqrt{3}$

Ex 2 :

1) $|z-6-4i|=i^6 \Leftrightarrow |z-6-4i|=-1$

Ce qui est impossible. L'ensemble cherché est donc vide

2) $|z+2-i|=|z-5-2i| \Leftrightarrow |z-(-2+i)|=|z-(5+2i)| \Leftrightarrow$ BM=CM où $B(-2+i)$ et $C(5+2i)$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment $[BC]$

3) $|iz-1|=5 \Leftrightarrow |i(z+i)|=5 \Leftrightarrow |i||z+i|=5 \Leftrightarrow |z+i|=5 \Leftrightarrow$ AM=5 où $A(-i)$

L'ensemble cherché est donc le cercle de de centre A et de rayon 5.

Ex 3 :

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$(\bar{z}-3i)(1+z)=\ldots= x^2+x+y^2+3y+(-3x-y-3)i$

$$(\mathrm{conj}(z)-3\cdot i)\cdot(1+z)$$
$$x^2+x+y^2+3\cdot y+(-3\cdot x-y-3)\cdot i$$

2) a)Ainsi : $(\bar{z}-3i)(1+z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+x+y^2+3y=0$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $A\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$

b) $(\bar{z}-3i)(1+z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3x-y-3=0 \Leftrightarrow y=-3x-3$

L'ensemble cherché est la droite d'équation $y=-3x-3$

Ex 4 :

1) $z_1=6\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=6\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2) $z_2=-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=-3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$|z_2|=3$ et $\arg(z_2)=\arg(-3)-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6} \quad [2\pi]$

Donc $z_2=3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$