Texp **Pique-nique n ° 3**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème : 1) 5 pts 2) 3 pts 3) 6 pts 4) 3 pts 5) 3 pts	**Nom :**

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : Un peu de trigonométrie

1) Exprimer $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

2) a) Exprimer $\frac{\pi}{12}$ en fonction de $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{3}$.

b) Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l’équation $6\sin x+1=-2$

Ex 2 : 1) Développer $(a+b)^5$

2) En utilisant les formules d'Euler, en déduire la linéarisation de $\sin^5 x$.

Ex 3 : Soit $\mathrm{P}(z)=z^4+2z^3-11z^2+8z-60$.

1) Démontrer que pour tout complexe z , on a : $\mathrm{P}(\overline{z})=\overline{\mathrm{P}(z)}$

2) Déterminer une racine imaginaire pure évidente de P.

3) Quelle autre racine la question 1 permet-elle de trouver ?

4) Factoriser P dans les réels, sous la forme $\mathrm{P}(z)=(z^2+4)\times\mathrm{Q}(z)$ où Q est un trinôme du second degré.

5) En déduire une meilleure forme factorisée de P .

<u>Ex 4 :</u> 1) montrer que $z=\left(\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^6$ est un imaginaire pur.

2) Déterminer le plus petit réel positif k , tel que $kz \in \mathbb{U}$

<u>Ex 5 :</u> 

1) En factorisant par $e^{i\frac{5\pi}{8}}$, déterminer une forme exponentielle de $a=1+e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

2) En déduire le module et la mesure principale de l'argument de a

correction :

Ex 1 :

1) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+x\right) \quad =\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos(x)+\sin(x)\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \quad =\frac{\cos(x)}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$

2) a) $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

3) $6\sin x+1=-2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$\Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Ex 2 :

1) $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ et $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

2)

$$\sin^5 x \quad =\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5$$
$$=\frac{1}{32i}(e^{ix}-e^{-ix})^5$$
$$=\frac{1}{32i}\left((e^{ix})^5-5(e^{ix})^4(e^{-ix})+10(e^{ix})^3(e^{-ix})^2-10(e^{ix})^2(e^{-ix})^3+5(e^{ix})(e^{-ix})^4-(e^{ix})^{-5}\right)$$
$$=\frac{1}{32i}(e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix})$$
$$=\frac{1}{32i}(e^{i5x}-e^{-i5x}-5(e^{i3x}-e^{-i3x})+10(e^{ix}-e^{-ix}))$$
$$=\frac{1}{32i}(2i\sin(5x)-10i\sin(3x)+20i\sin(x)) \; 4$$
$$=\frac{1}{16}\sin(5x)-\frac{5}{16}\sin(3x)+\frac{5}{8}\sin(x)$$

Ex 3 :

1) $\overline{P(z)}=\overline{z^4+2z^3-11z^2+8z-60}=\overline{z}^4+\overline{2}\,\overline{z}^3-\overline{11}\,\overline{z}^2+\overline{8}\,\overline{z}-\overline{60}$

Ce qui donne $\overline{P(z)}=\overline{z}^4+2\overline{z}^3-11\overline{z}^2+8\overline{z}-60=P(\overline{z})$

2) $P(2i)=0$

3) $P(\overline{2i})=\overline{P(2i)}$ =0 , donc $-2i$ est aussi une racine de P.

4) Ainsi P est factorisable par $(z-2i)$ et $(z+2i)$ donc par :

$(z-2i)(z+2i)=z^2+4$

On peut écrire P sous la forme $P(z)=(z^2+4)(z^2+az-15)$

(On sait déjà que le coefficient de z^2 du trinôme du second degré est 1, car le coefficient de z^4 de P est 1, et en utilisant le même raisonnement on peut dire que le terme constant du trinôme du second degré est -15)

Pour tout complexe z , on a :

$$(z^2+4)(z^2+az-15)=z^4+az^3-15z^2+4z^2+4az-60$$
$$=z^4+az^3-11z^2+4az-60$$

En identifiant avec $P(z)=z^4+2z^3-11z^2+8z-60$, on obtient $4a=8$ et donc $a=2$

Donc pour tout complexe z , on a : $P(z)=(z^2+1)(z^2+2z-15)$

5) On cherche maintenant à factoriser le trinôme Q .

Δ =4+60=64 on trouve $x_1=-5$ et $x_2=3$

Ce qui donne $P(z)=(z^2+4)(z-3)(z+5)$

Ex 4 :

1) $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^6=\left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^6=\left(\frac{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^6=\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^6=\left(\sqrt{\frac{3}{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^6$

On obtient $\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2-2i}\right)^6=\sqrt{\frac{3}{2}}^6e^{i\left(\frac{5\pi}{2}\right)}=\frac{27}{8}e^{\frac{i(5\pi)}{2}}=\frac{27}{8}e^{\frac{i(5\pi)}{2}}=\frac{27}{8}i$

2) Il suffit de prendre $k=\frac{8}{27}$

Ex 5 :

1) $a=1+e^{i\frac{5\pi}{4}}=e^{i\frac{5\pi}{8}}\left(e^{-i\frac{5\pi}{8}}+e^{i\frac{5\pi}{8}}\right)=e^{i\frac{5\pi}{8}}2\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)=2\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)e^{i\frac{5\pi}{8}}$

Or $\frac{5\pi}{8}\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)<0$

Il faut alors écrire :

$a=-2\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)e^{i\pi}e^{\frac{5\pi}{8}}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)e^{i\left(\frac{5\pi}{8}+\pi\right)}=-2\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)e^{i\frac{13\pi}{8}}$

2) $|a|=-2\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\arg(a)=-\frac{3\pi}{8}\quad[2\pi]$