Texp **Pique-nique n ° 4**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 10 pts **2)** 5 pts **3)** 5 pts	

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : 1) On considère l'équation $z^2=1+i$ (E_1) . On pose $z=x+iy$ où x et y sont des réels.

a) Combien cette équation a-t-elle de solutions dans $\mathbb{C}$:
b) Trouver un système d'équations vérifié par x et y .

c) Ce système est-il suffisant pour déterminer x et y ? *(la réponse est évidente … étant donné les questions suivantes)* :
d) En utilisant le module, déterminer une autre équation vérifiée par x et y .

e) En déduire x^2 et y^2 .

f) En déduire que les solutions de l'équation (E_1) sont $z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$ et $z_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$

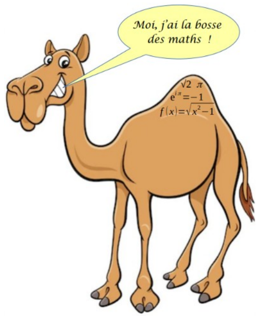
2) On considère maintenant l'équation $z^4-2z^2+2=0$ (E)

a) Combien cette équation admet-elle de solutions dans $\mathbb{C}$:
b) Montrer que si z est solution de (E), alors $\bar{z}$ et aussi solution de (E).

c) Montrer que les solutions de l'équation (E_1) sont aussi des solutions de l'équation (E)

d) En déduire sans calcul toutes les solutions de (E).

Ex 2 : Soit $P(z) = z^4 - 2z^3 + 17z^2 - 18z + 72$



1) a) Montrer que $3i$ est une racine de P .

b) En déduire (sans démonstration) une autre racine de P :

2) Justifier que $P(z)$ peut être factorisé par $z^2 + 9$.

3) Déterminer l'ensemble des racines de P .

Ex 3 : Soit $P(z) = 2z^4 + 20z^3 + 65z^2 + 75z$

1) Déterminer deux réels a et b tels que $P(z) = a(z^2 + 5z)^2 + b(z^2 + 5z)$

2) Factoriser $P(z)$ dans les réels.

3) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

correction :

Ex 1 : 1) a) 2

b) $(x+iy)^2=(1+i) \Leftrightarrow x^2-y^2+i\times 2xy=1+i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

c) non

d) $z^2=1+i \Rightarrow |z^2|=|1+i| \Rightarrow |z|^2=\sqrt{2} \Rightarrow x^2+y^2=\sqrt{2}$

e) On a $\begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2+y^2=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 2x^2=1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\frac{-1+\sqrt{2}}{2} \\ x^2=\frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}\, ou\, y=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}} \\ x=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\, ou\, x=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$

f) Comme $xy>0$, on en déduit que x et y sont de même signe.

Les deux solutions de (E_1) sont donc : $z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$ et $z_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$

2) a) 4

b) $z^4-2z^2+2=0 \Rightarrow \overline{z^4-2z^2+2}=\overline{0} \Rightarrow \bar{z}^4-2\bar{z}^2+2=0$

c) On pose $\mathrm{Z}=z^2$.

On est alors amené à résoudre l'équation $\mathrm{Z}^2-2\mathrm{Z}+2=0$

$\Delta=4-8=-4$

Cette équation a donc deux solutions complexes : $\mathrm{Z}_1=\frac{2-2i}{2}=1-i$ et $\mathrm{Z}_2=\frac{2+2i}{2}=1+i$

Les solutions de (E) sont donc les solutions des équations $z^2=1-i$ et $z^2=1+i$, c'est à dire de l'équation (E_1).

d) Les solutions de (E_1) sont solutions de (E), d'après la question 2b) leurs conjuguées sont aussi solutions. On obtient :

$z_1=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$, $z_2=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$, $z_3=\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$ et $z_4=-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$

Ex 2 : 1) a) $\mathrm{P}(3i)=(3i)^4-2(3i)^3+17(3i)^2-18(3i)+72=81+54i-153-54i+72=0$

b) Comme les coefficients sont réels, on aussi P($\overline{3i}$)=0, c'est à dite $\mathrm{P}(-3i)=0$

2) $\mathrm{P}(3i)=0$, donc P est factorisable par $z-3i$.
$\mathrm{P}(-3i)=0$, donc P est factorisable par $z+3i$.
Ainsi P est factorisable par $(z-3i)(z+3i)=z^2+9$

3) On peut écrire P sous la forme $\mathrm{P}(z)=(z^2+9)(z^2+az+b)$
(On sait déjà que le coefficient de z^2 du trinôme du second degré est 1, car le coefficient de z^4 de P est 1)
Pour tout complexe z , on a :

$$\begin{aligned}(z^2+9)(z^2+az+b)&=z^4+az^3+bz^2+9z^2+9az+9b\\&=z^4+az^3+(9+b)z^2+9az+9b\end{aligned}$$

En identifiant avec $\mathrm{P}(z)=z^4-2z^3+17z^2-18z+72$, on obtient :

$$\begin{cases} a=-2 \\ 9+b=17 \\ 9a=-18 \\ 9b=72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases}$$

Donc $\mathrm{P}(z)=(z^2+9)(z^2-2z+8)$

$z^2-2z+8=0 \Leftrightarrow z=1-\sqrt{7}i$ ou $z=1+\sqrt{7}i$ (facile)

Les racines de P sont donc : $3i$, $-3i$, $1-\sqrt{7}i$ et $1+\sqrt{7}i$

Ex 3 : 1) $a(z^2+5z)^2+b(z^2+5z) = a(z^4+10z^3+25z^2)+bz^2+5bz = az^4+(10az)^3+((25a+b)z)^2+5bz$

En identifiant avec $\mathrm{P}(z)=2z^4+20z^3+65z^2+75z$, on obtient $\begin{cases} a=2 \\ b=15 \end{cases}$

Donc pour tout complexe z , on a : $\mathrm{P}(z)=2(z^2+5z)^2+15(z^2+5z)$

2) Pour tout complexe z , on a :

$\mathrm{P}(z)=2(z^2+5z)^2+15(z^2+5z)=(z^2+5z)(2z^2+10z+15)=z(z+5)(2z^2+10z+15)$

3) $\mathrm{P}(z)=0 \Leftrightarrow z=0$ ou $z=-5$ ou $z=-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}i$ ou $z=-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i$ (en calculant Δ …)