Texp **Pique-nique n ° 5** **Barème :** **Nom :**

1) 7 pts **2)** 5 pts **3)** 3 pts 4 **)** 5 pts

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : On munit le plan d'un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$)
On considère l'équation (E) $z^2-6z+c=0$ où c est un réel.

1) Pour quelles valeurs de c , l'équation (E) admet-elle deux solutions complexes ?

2) Déterminer ces deux solutions que l'on note z_A et z_B .

3) On considère les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B .
a) Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.

b) En calculant $\frac{z_B}{z_A}$, déterminer la (ou les) valeur(s) de c tel (tels) que OAB soit rectangle en O.

c) Déterminer la (ou les) valeur(s) de c tel (tels) que OAB soit équilatéral ?

Ex 2 :

1) Soit $\omega \in \mathrm{U}_{11}$ tel que $\omega \neq 1$. Montrer que $\omega^k \in \mathrm{U}_{11}$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$

On admet la réciproque, ce qui signifie que l'ensemble U_{11} est constitué des complexes ω^k avec $k \in \{0, 1, \dots, 10\}$ où ω est un élément quelconque de U_{11}

2) Calculer la somme des éléments de U_{11} .

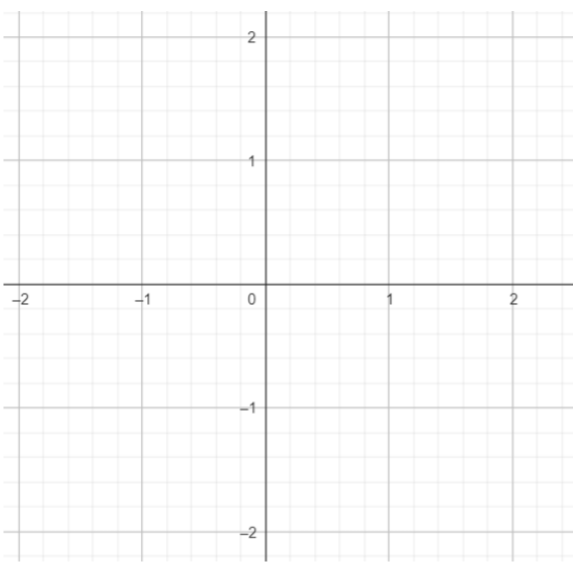
<u>Ex 3 :</u> Soit le points A(-2) et f la fonction qui à tout point M (différent de A) d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}+2}$.

Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

<u>Ex 4 :</u>

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1+i)^6=1$

b) Représenter dans le plan complexe les points images des solutions.



2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+1)^5=(2-i)^5$

Ex 1 :

1) $\Delta = 36 - 4c$, $36 - 4c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 36 < 4c \quad \Leftrightarrow \quad c > 9$

2) $z_A = \dfrac{6 - i\sqrt{4c - 36}}{2} = 3 - i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 + i\sqrt{c-9}$

3) a) $\mathrm{OA} = |z_\mathrm{A}| = |z_\mathrm{B}| = \mathrm{OB}$

b) $\dfrac{z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}} = \dfrac{\overline{z_\mathrm{A}}^2}{z_\mathrm{A}\overline{z_\mathrm{A}}} = \dfrac{-c + 18 + i \times 6\sqrt{c-9}}{c} = \dfrac{-c+18}{c} + i \times \dfrac{6\sqrt{c-9}}{c}$

OAB est rectangle en O ssi $\dfrac{z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A}}$ est un imaginaire pur, c'est à dire pour $c = 18$

c) $\mathrm{AB} = |z_B - z_A| = |2i\sqrt{c-9}| = 2\sqrt{c-9}$ et $\mathrm{OA} = \sqrt{c}$

Ainsi OAB est équilatéral ssi : (pour $c > 9$)

$2\sqrt{c-9} = \sqrt{c} \quad \Leftrightarrow \quad 4(c-9) = c \quad \Leftrightarrow \quad 3c = 36 \quad \Leftrightarrow \quad c = 12$

Ex 2 :

1) Il existe $p \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, tel que $\omega = e^{i\frac{2p\pi}{11}}$

Soit $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. On a $\omega^k = \left(e^{i\frac{2p\pi}{11}}\right)^k = e^{i\frac{2(pk)\pi}{11}}$

On effectue la division euclidienne de pk par 11.

On peut donc écrire :
$pk = 11q + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, \ldots, 10\}$

Ainsi $\omega^k = e^{i\frac{2(11q+r)\pi}{11}} = e^{i\left(2q\pi + \frac{2r\pi}{11}\right)} = e^{i\left(\frac{2r\pi}{11}\right)}$ où $r \in \{0, 1, \ldots, 10\}$

Ainsi $\omega^k \in \mathrm{U}_{11}$

2) Soit $\omega \in \mathrm{U}_{11}$ tel que $\omega \neq 1$. On vient de voir que U_{11} est constitué des complexes ω^k avec $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ où ω est un élément quelconque de U_{11} .

$\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \omega^k = \frac{1 - \omega^{11}}{1 - \omega}$ (somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison ω et de premier terme 1)

Or $\omega \in \mathrm{U}_{11}$ donc $\omega^{11} = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \omega^k = 0$

Ex 3 :

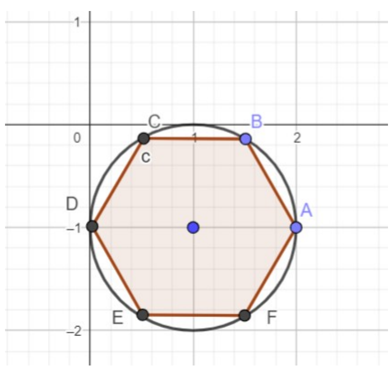
$z' = z \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}+2} = z \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z}(z-2) = z(\overline{z}+2) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z}z - 2\overline{z} = z\overline{z} + 2z \quad \Leftrightarrow \quad -2\overline{z} = 2z \quad \Leftrightarrow \quad z = -\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in i\mathbb{R}$

L'ensemble des points invariants par f est donc l'axe des ordonnées.

Ex 4 :

1) On pose $Z = z - i$.
On sait que les solutions de $Z^6 = 1$ sont les complexes :
$Z = e^{i\frac{k\pi}{3}}$ où $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

On en déduit que les solutions de $(z - 1 + i)^6 = 1$ sont les complexes
$z = 1 - i + e^{i\frac{k\pi}{3}}$ où $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$



2) $(z+1)^5=(2-i)^5 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{z+1}{2-i}\right)^5=1$

On pose $Z=\frac{z+1}{2-i}$.

On sait que les solutions de $Z^5=1$ sont les complexes :

$Z=e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ où $k\in\{0,1,2,3,4\}$

On en déduit que les solutions de $(z+1)^5=(2-i)^5$ sont les complexes

$z=-1+(2-i)e^{i\frac{2k\pi}{5}}$ où $k\in\{0,1,2,3,4\}$