Texp **Pique-nique n ° 6** **Barème :** **Nom :**

1) 4 pts **2)** 4 pts **3)** 4 pts **4)** 4 pts **5)** 4 pts

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Répondre sur cette feuille

Ex 1 : 1) Déterminer une combinaison linéaire de $3n+2$ et $5n+7$ donnant un résultat constant.

2) En déduire les entiers relatifs n tels que $3n+2$ divise $5n+7$.

Ex 2 : 1) Montrer par l'absurde que l'équation $12753x-45711y=8921$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

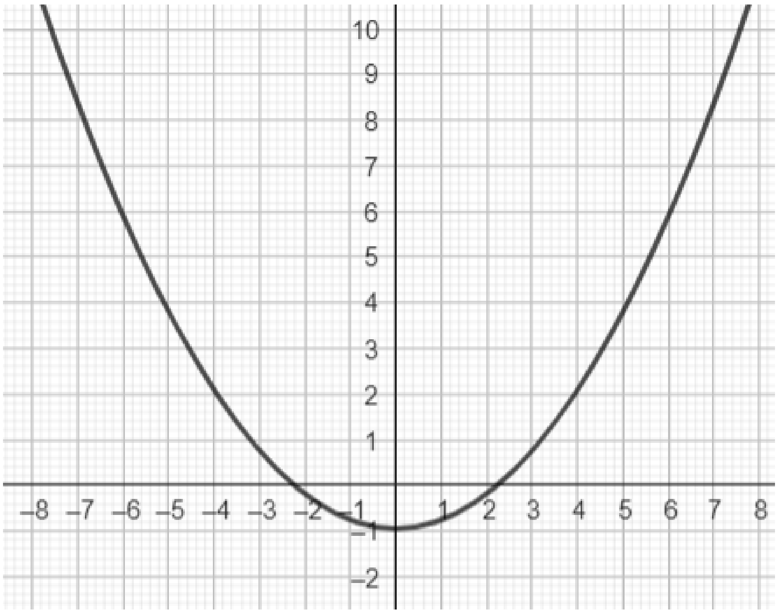
2) a) Trouver un couple d'entiers tel que $15x-22y=1$

b) En déduire un couple d'entiers tel que $15x-22y=427$

<u>Ex 3 :</u> Déterminer le reste de la division euclidienne de 2025^{338} par 7.

Ex 4 :

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\frac{4}{21}x^2-\frac{20}{21}$



Le but du problème est de savoir s'il existe un point de coordonnées entières appartenant à C_f .

1) Montrer que si un point $A(x;y)$ où $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ appartient à C_f , alors on peut trouver $a\in\{0,1,2,...,6\}$ et $b\in\{0,1,2,...,6\}$ tels que $a\,x^2\equiv b[7]$.

2) Conclure.

<u>Ex 5 :</u> Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $6x \equiv 5[13]$

<u>Rébus :</u>

correction :

Ex 1 : 1) $3\times(5n+7)-5\times(3n+2)=11$

2) Si $3n+2$ divise $5n+7$ alors $3n+2$ divise toute combinaison linéaire de $5n+7$ et de $3n+2$.
En particulier $3n+2$ divise $3\times(5n+7)-5\times(3n+2)=11$

Les diviseurs de 11 sont -1, 1, -11 et 11

Ainsi $3n+2=-1$ ou $3n+2=1$ ou $3n+2=-11$ ou $3n+2=11$
On en déduit que : $n=-1$ ou $n=-\frac{1}{3}$ ou $n=-\frac{13}{3}$ ou $n=3$

$n=-\frac{1}{3}$ et $n=-\frac{13}{3}$ ne sont pas des entiers.

Réciproquement :

si $n=-1$ alors $3n+2$ =-1 et $5n+7$ =2

si $n=3$ alors $3n+2$ =11 et $5n+7$ =22

Dans ces deux cas $3n+2$ divise $5n+7$.

Il y a donc 2 solutions : -1 et 3

Ex 2 :

1) Supposons qu'il existe un couple d'entiers relatifs tel que $12753x-45711y=8921$.
3 divisant 12753 et 45711, il divise donc aussi $12753x-45711y$. Il devrait donc diviser 8921, ce qui est absurde.
L'équation n'a donc pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2) a) $15\times3-22\times2=45-44=1$ donc (3,2) répond au problème.

b) $(3\times427,2\times427)$, c'est à dire (1281,854)

Ex 3 : On a $2025=289\times7+2$

$2025\equiv2[7]$, donc $2025^{338}\equiv2^{338}[7]$

Par ailleurs $2^3\equiv1[7]$ et $338=112\times3+2$

Ainsi $2^{338}=2^{3\times112+2}=(2^3)^{112}\times2^2=(2^3)^{112}\times4$

Or $2^3\equiv1[7]$, donc $(2^3)^{112}\equiv1[7]$

Ainsi $2025^{338}\equiv4[7]$

Comme $0\leqslant4<7$, 4 est le reste de la division euclidienne de 2025^{338} par 7.

Ex 4 :

1) Si un point $A(x;y)$ où $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ appartient à C_f , alors ses coordonnées vérifient :
$y=\frac{4}{21}x^2-\frac{20}{21} \Leftrightarrow 21y=4x^2-20 \Leftrightarrow 4x^2-21y=20$

On a : $21\equiv0[7]$, $4\equiv-3[7]$ et $20\equiv-1[7]$

Ainsi $4x^2-21y=20 \Rightarrow -3x^2\equiv-1[7] \Rightarrow 3x^2\equiv1[7]$

Si un point $A(x;y)$ où $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ appartient à C_f , alors $3x^2\equiv1[7]$

2)

$x[7]$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2[7]$	0	1	4	2	2	4	1
$3x^2[7]$	0	3	5	6	6	5	3

Cette étude exhaustive nous permet de conclure :
On constate que $3x^2$ n'est jamais congru à 1 modulo 7, et il n'existe pas de points de coordonnées entières appartenant à C_f .

Ex 5 :

$6x \equiv 5[13] \Rightarrow 11 \times 6x \equiv 11 \times 5[13] \Rightarrow 66x \equiv 55[13]$
Or $66 \equiv 1[13] \Rightarrow 66x \equiv x[13]$ et $55 \equiv 3[13]$
Donc $6x \equiv 5[13] \Rightarrow x \equiv 3[13]$

Réciproque :

$x \equiv 3[13] \Rightarrow 6x \equiv 18[13] \Rightarrow 6x \equiv 5[13]$

On a donc : $6x \equiv 5[13] \Leftrightarrow x \equiv 3[13]$

Les solutions sont donc les entiers de la forme $x = 3 + 13k$ (où $k \in \mathbb{Z}$)

Rébus : J'adore les congruences … facile