

Temp **Devoir n ° 1**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées



Barème :

1) 4 pts 2) 4 pts 3) 4 pts 4) 4 pts 5) 4 pts

Nom :

Ex 1 : 1) Déterminer une combinaison linéaire de $3n+3$ et $7n+2$ donnant un résultat constant.

2) En déduire les entiers relatifs n tels que $3n+3$ divise $7n+2$.

Ex 2 : 1) Montrer par l'absurde que l'équation $12753x^2 - 45711y^4 = 8921$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2) a) Trouver un couple d'entiers tel que $45x - 66y = 3$

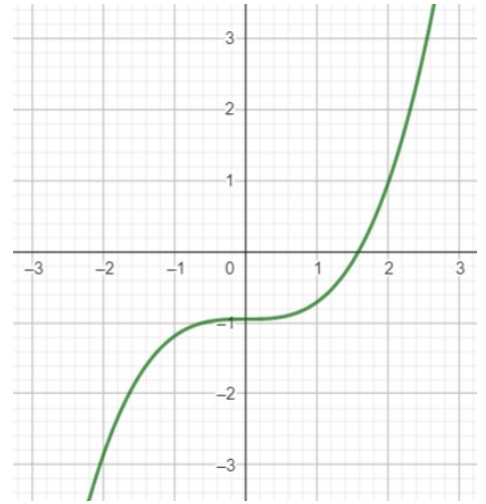
b) En déduire un couple d'entiers tel que $15x - 22y = 327$

Ex 3 :

Soit C_f la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{5}{21}x^3 - \frac{20}{21}$

Le but du problème est de savoir s'il existe un point de coordonnées entières appartenant à C_f .

1) Montrer que si un point $A(x; y)$ où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ appartient à C_f , alors on peut trouver $a \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ et $b \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ tels que $ax^3 \equiv b[7]$.



2) Conclure.

Ex 4 : Déterminer le reste de la division euclidienne de 38346863^{338} par 7.

Ex 5 : Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $6x \equiv 5[13]$

correction :

Ex 1 : 1) $7 \times (3n+3) - 3 \times (7n+2) = 15$

2) Si $3n+3$ divise $7n+2$ alors $3n+3$ divise toute combinaison linéaire de $3n+3$ et de $7n+2$.
En particulier $3n+3$ divise $7 \times (3n+3) - 3 \times (7n+2) = 15$

Les diviseurs de 15 sont -1, 1, -3, 3, -5, 5, -15 et 15

Ainsi $3n+3 = -1$ ou $3n+3 = 1$ ou $3n+3 = -3$ ou $3n+3 = 3$ ou $3n+3 = -5$ ou $3n+3 = 5$ ou $3n+3 = -15$ ou $3n+3 = 15$

On en déduit que : $n = -\frac{4}{3}$ ou $n = -\frac{2}{3}$ ou $n = -2$ ou $n = 0$ ou $n = -\frac{8}{3}$ ou $n = \frac{2}{3}$ ou $n = -6$ ou $n = 4$

$n = -\frac{4}{3}$, $n = -\frac{2}{3}$, $n = -\frac{8}{3}$ et $n = \frac{2}{3}$ ne sont pas des entiers, nous pouvons donc les exclure.

Réciproquement :

si $n = -2$ alors $3n+3 = -3$ et $7n+2 = -12$: OUI

si $n = 0$ alors $3n+3 = 3$ et $7n+2 = 2$: NON

si $n = -6$ alors $3n+3 = -15$ et $7n+2 = -40$: NON

si $n = 4$ alors $3n+3 = 15$ et $7n+2 = 30$: OUI

$3n+3$ divise $7n+2$ uniquement pour $n = -2$ et $n = 4$

Ex 2 :

1) Supposons qu'il existe un couple d'entiers relatifs tel que $12753x^2 - 45711y^4 = 8921$.
3 divisant 12753 et 45711, il divise donc aussi $12753x^2 - 45711y^4$. Il devrait donc diviser 8921, ce qui est absurde.
L'équation n'a donc pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

2) a) $45x - 66y = 3 \Leftrightarrow 3(15x - 22y) = 3 \Leftrightarrow 15x - 22y = 1$

$15 \times 3 - 22 \times 2 = 45 - 44 = 1$ donc (3,2) répond au problème.

b) $(3 \times 327, 2 \times 327)$, c'est à dire (981,654)

Ex 3 :

1) Si un point $A(x; y)$ où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ appartient à C_f , alors ses coordonnées vérifient :

$$y = \frac{5}{21}x^3 - \frac{20}{21} \Leftrightarrow 21y = 5x^3 - 20 \Leftrightarrow 5x^3 - 21y = 20$$

On a : $21 \equiv 0[7]$ et $20 \equiv 6[7]$

Ainsi $5x^3 - 21y = 20 \Rightarrow 5x^3 \equiv 6[7]$

2)

$x[7]$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x^3[7]$	1	-1	-1	0	1	1	-1
$5x^3[7]$	5	2	2	0	5	5	2

Cette étude exhaustive nous permet de conclure :

On constate que $5x^3$ n'est jamais congru à 6 modulo 7, et il n'existe pas de points de coordonnées entières appartenant à C_f .

Ex 4 : On a $38346863 = 7 \times 5478123 + 2$

$38346863 \equiv 2[7]$, donc $38346863^{338} \equiv 2^{338}[7]$

Par ailleurs $2^3 \equiv 1[7]$ et $338 = 112 \times 3 + 2$

Ainsi $2^{338} = 2^{3 \times 112 + 2} = (2^3)^{112} \times 2^2 = (2^3)^{112} \times 4$

Or $2^3 \equiv 1[7]$, donc $(2^3)^{112} \equiv 1[7]$

Ainsi $38346863^{338} \equiv 4[7]$

Comme $0 \leq 4 < 7$, 4 est le reste de la division euclidienne de 38346863^{338} par 7.

Ex 5 :

$$6x \equiv 5[13] \Rightarrow 11 \times 6x \equiv 11 \times 5[13] \Rightarrow 66x \equiv 55[13]$$

$$\text{Or } 66 \equiv 1[13] \Rightarrow 66x \equiv x[13] \text{ et } 55 \equiv 3[13]$$

$$\text{Donc } 6x \equiv 5[13] \Rightarrow x \equiv 3[13]$$

Réciproque :

$$x \equiv 3[13] \Rightarrow 6x \equiv 18[13] \Rightarrow 6x \equiv 5[13]$$

$$\text{On a donc : } 6x \equiv 5[13] \Leftrightarrow x \equiv 3[13]$$

Les solutions sont donc les entiers de la forme $x = 3 + 13k$ (où $k \in \mathbb{Z}$)