Texp **Devoir n ° 2**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème : A côté de chaque question	**Nom :**

D'après Baccalauréat S Métropole–La Réunion : 9 septembre 2015

Partie A : On considère l'équation (E) : $15x-26k=m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1pt **1) a)** Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tel que $15u-26v=1$.

2 pts **b)** Trouver un tel couple.

2 pts **2)** En déduire une solution particulière $(x_0;k_0)$ de l'équation (E).

2 pts **3)** Montrer que $(x;k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $15(x-x_0)-26(k-k_0)=0$.

3 pts **4)** Déterminer les solutions de l'équation (E) :

Partie B On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous. On définit un système de codage :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant,
- on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26,
- on associe à y la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

2 pts **1)** Coder le mot MATHS.

2) Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26.

2 pts **a)** Montrer alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x-26k=y-7$.

2 pts **b)** En déduire que $x \equiv 7y+3$ [26]

2 pts **c)** En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.

2 pts **3)** Décoder le mot WHL.

Bonus : 1 pt **4)** Montrer que, par ce système de codage, deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

Correction :

Partie A

On considère l'équation (E) : $15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. $15 = 3 \times 5$ et $26 = 2 \times 13$; les deux nombres 15 et 26 sont donc premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, on peut déduire qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tel que $15u - 26v = 1$.
   On cherche un tel couple en utilisant l'algorithme d'Euclide et en écrivant les restes successifs comme combinaisons linéaires de 15 et de 26 :
$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
26 & = & 1\times 15+11 & -1\times 15+1\times 26 & = & 11\\
15 & = & 1\times 11+4 & 15-1\times 11 & = & 4\\
 & & & 15-(-1\times 15+1\times 26) & = & 4\\
 & & & 2\times 15-1\times 26 & = & 4\\
11 & = & 2\times 4+3 & 11-2\times 4 & = & 3\\
 & & & (-1\times 15+1\times 26)-2(2\times 15-1\times 26) & = & 3\\
 & & & -5\times 15+3\times 26 & = & 3\\
4 & = & 1\times 3+1 & 4-1\times 3 & = & 1\\
 & & & (2\times 15-1\times 26)-1(-5\times 15+3\times 26) & = & 1\\
 & & & 7\times 15-4\times 26 & = & 1
\end{array}$$
   Donc le couple $(7\,;4)$ est solution de l'équation $15u - 26v = 1$.
2. $15 \times 7 - 26 \times 4 = 1$ donc $15 \times (7m) - 26 \times (4m) = m$
   Le couple $(7m\,;4m)$ est une solution particulière de l'équation (E) : $15x - 26k = m$.
3. • On suppose que $15(x-x_0) - 26(k-k_0) = 0$ avec $x_0 = 7m$ et $k_0 = 4m$, donc $15(x-7m) - 26(k-4m) = 0$
   Alors $15x - 15\times 7m - 26k + 26 \times 4m = 0$, ce qui implique $15x - 26k = 15 \times 7m - 26 \times 4m$ ou encore $15x - 26k = m$
   Donc le couple $(x\,;\,k)$ est solution de (E).
   • On suppose que $(x\,;\,k)$ est solution de (E) : $15x - 26k = m$
   On sait que $(x_0\,;\,k_0)$ est une solution de (E) : $15x_0 - 26k_0 = m$
   On soustrait membre à membre : $15(x-x_0) - 26(k-k_0) = 0$
   Donc $15(x-x_0) - 26(k-k_0) = 0$
   On peut dire que $(x\,;\,k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $15(x-x_0) - 26(k-k_0) = 0$.
4. • Si le couple $(x\,;\,k)$ vérifie le système $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 26q+7m \\ k & = & 15q+4m \end{array}\right.$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors :
   $15x - 26k = 15(26q+7m) - 26(15q+4m) = 15 \times 26q + 105m - 26 \times 15q - 104m = m$.
   Donc le couple $(x\,;\,k)$ est solution de (E).
   • Si le couple $(x\,;\,k)$ est solution de (E), on sait que $15(x-7m) - 26(k-4m) = 0 \iff 15(x-7m) = 26(k-4m)$
   Donc 15 divise $26(k-4m)$. Or 15 et 26 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gausse, 15 divise $k-4m$; donc il existe un entier relatif q tel que $k - 4m = 15q$ et donc $k = 15q + 4m$.
   $\left.\begin{array}{l} 15(x-7m) = 26(k-4m) \\ k-4m = 15q \end{array}\right\} \Longrightarrow 15(x-7m) = 26 \times 15q \iff x - 7m = 26q$ donc $x = 26q + 7m$
   Donc, si $(x\,;\,k)$ est solution de l'équation (E), on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 26q+7m \\ k & = & 15q+4m \end{array}\right.$

   Les solutions de l'équation (E) sont donc exactement les couples $(x\,;\,k)$ d'entiers relatifs tels que :
   $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 26q+7m \\ k & = & 15q+4m \end{array}\right.$ où $q \in \mathbb{Z}$

Partie B

1. On code le mot **MATHS** :

lettre	x	$15x+7$	reste	lettre
M	12	187	5	F
A	0	7	7	H
T	19	292	6	G
H	7	112	8	I
S	18	277	17	R

Donc le mot **MATHS** se code en **FHGIR**.

2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x+7$ par 26.

   a. Si y est le reste de la division de $15x+7$ par 26, cela signifie que $(15x+7)-y$ est un multiple de 26, donc qu'il existe un entier relatif k tel que $(15x+7)-y=26k$, ce qui équivaut à
   $$15x-26k=y-7$$

   b. $15x-26k=y-7 \iff 7\times 15x-7\times 26k=7\times y-7\times 7 \iff 105x-7\times 26k=7y-49$
   $$\left.\begin{array}{r} 105=4\times 26+1 \Rightarrow 105\equiv 1 \pmod{26} \Rightarrow 105x\equiv x \pmod{26} \\ 7\times 26\equiv 0 \pmod{26} \Rightarrow 7\times 26k\equiv 0 \pmod{26} \\ -49=-2\times 26+3\equiv 3 \pmod{26} \end{array}\right\} \Longrightarrow x\equiv 7y+3 \pmod{26}$$

   c. Voici donc un système de décodage d'une lettre :
   - à cette lettre, on associe l'entier y correspondant,
   - on associe ensuite à y l'entier x qui est le reste de la division euclidienne de $7y+3$ par le nombre 26,
   - on associe à x la lettre correspondante.

3. On décode les trois lettres W, H et L :

lettre	y	$7y+3$	reste	lettre
W	22	157	1	B
H	7	52	0	A
L	11	80	2	C

Donc le mot **WHL** se décode en **BAC**.

4. À chaque lettre de l'alphabet, on fait correspondre une seule lettre de l'alphabet par le système de codage décrit dans le texte, celui qui fait passer de la lettre correspondant au nombre entier x à la lettre correspondant au nombre entier y.

   Réciproquement, chaque lettre de l'alphabet est l'image d'une unique lettre de l'alphabet que l'on obtient par le système de décodage expliqué à la question **2.c.**

   Le système de codage réalise donc une bijection sur l'ensemble des lettres de l'alphabet.

   Donc deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25