Texp **Devoir n ° 4**

- Durée 1 h
- Calculatrices autorisées

Barème :	**Nom :**
1) 5 pts **2)** 4,5 pts **3)** 4,5 pts **4)** 6 pts	

Ex 1 : Soit z un nombre complexe non nul.
En calculant, le conjugué des nombres ci-dessous, déterminer si chacun de ces nombres est un nombre réel, un nombre imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

1) $Z_1 = \dfrac{2i - i\bar{z}z}{z+\bar{z}}$ (où z n'est pas un imaginaire pur)

2) $Z_2 = \left(z^2 - \bar{z}^2\right)\left(z^5 - \bar{z}^5\right)$

Ex 2 : Soit f la fonction définie pour tout complexe z différent de -4 par $f(z)=\frac{2z-3}{z+4}$.

1) Calculer, en détaillant les calculs, l'image de $-1+\sqrt{2}i$.

2) Montrer que si z est solution de l'équation $f(z)=z$, alors $\bar{z}$ est aussi solution de cette équation.

3) On admet que f admet deux invariants . Déterminer ces deux invariants.

Ex 3 : 1) Rappeler la formule du binôme de Newton :

$(a+b)^n =$

2) Dans la formule de Newton avec $(a+2b)^{10}$, peut-on trouver un terme du type $a^9 b$. Si oui, quel est son coefficient ?

3) a) En utilisant le binôme de Newton, déterminer la forme algébrique de $(1+i)^5$.

b) En déduire la forme algébrique de $(10^{121}-10^{121} i)^5$

Ex 4 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

1) $(iz-2)^2=-5$

2) $z^2-2\overline{z}=1$

Correction :

Ex 1 :

1) $\overline{Z_1}=\dfrac{\overline{2i-i\bar{z}z}}{\overline{z+\bar{z}}}=\dfrac{-2i+iz\bar{z}}{\bar{z}+z}\quad=-Z_1$

Z_1 est donc un imaginaire pur.

2) $\overline{Z_2}=\overline{(z^2-\bar{z}^2)}\,\overline{(z^5-\bar{z}^5)}=(\bar{z}^2-z^2)(\bar{z}^5-z^5)=-(z^2-\bar{z}^2)\times(-(z^5-\bar{z}^5))=Z_2$

Z_2 est donc un réel.

Ex 2 :

1) $f(-1+\sqrt{2}i)=\dfrac{2(-1+\sqrt{2}i)-3}{(-1+\sqrt{2}i)+4}=\dfrac{-5+2\sqrt{2}i}{3+\sqrt{2}i}=\dfrac{(-5+2\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)}{(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)}=\dfrac{-15+5\sqrt{2}i+6\sqrt{2}i+4}{9+2}=\dfrac{-11+11\sqrt{2}i}{11}=-1+\sqrt{2}i$

2) f($\bar{z}$)= $\dfrac{2\bar{z}-3}{\bar{z}+4}=\dfrac{\overline{2z-3}}{\overline{z+4}}=\overline{\left(\dfrac{2z-3}{z+4}\right)}$ = $\bar{z}$

3) On a vu à la question 1) que $-1+\sqrt{2}i$ est un invariant. La question 2) nous permet de dire que $-1-\sqrt{2}i$ est l'autre invariant.

Ex 3 :

1) $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

2) Oui, son coefficient est $2\times\binom{10}{1}$ =20

3) a) $(1+i)^5=1^5+5\times1^4i^1+10\times1^3i^2+10\times1^2i^3+5\times1^1i^4+i^5=1+5\times i^1+10\times i^2+10\times i^3+5\times i^4+i^5=1+5i-10-10i+5+i=-4-4i$

b) $(10^{121}-10^{121}i)^5=(10^{121})^5(1-i)^5=10^{605}(1-i)^5$ or $(1-i)^5=\overline{(1+i)^5}=\overline{(-4-4i)}=-4+4i$

Ainsi $(10^{121}-10^{121}i)^5=-4\times10^{605}+4\times10^{605}i$

Ex 4 :

1) $(iz-2)^2=-5 \Leftrightarrow (iz-2)^2=5i^2 \Leftrightarrow iz-2=\sqrt{5}i$ ou $iz-2=-\sqrt{5}i \Leftrightarrow z+2i=\sqrt{5}$ ou $z+2i=-\sqrt{5} \Leftrightarrow z=\sqrt{5}-2i$ ou $z=-\sqrt{5}-2i$

(en multipliant les deux équations par $-i$)

2) $z^2-2\bar{z}=1$

$\Leftrightarrow (x+iy)^2-2(x-iy)=1$

$\Leftrightarrow x^2+2ixy-y^2-2x+2iy=1$

$\Leftrightarrow (x^2-y^2-2x-1)+2iy(x+1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2-2x-1=0\\2y(x+1)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2-2x-1=0\\y=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}x^2-y^2-2x-1=0\\x=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x-1=0\\y=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}y^2=2\\x=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1-\sqrt{2}\text{ ou } x=1+\sqrt{2}\\y=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}y=-\sqrt{2}\text{ ou } y=\sqrt{2}\\x=-1\end{cases}$

L'ensemble des solutions est donc $S=\{1-\sqrt{2};1+\sqrt{2};-1-\sqrt{2}i;-1+\sqrt{2}i\}$