

Devoir n ° 1

- Durée 1 h 30
- Calculatrices autorisées



Note :

/20

<u>Nom :</u>

Dans tout le devoir, on se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

2 pts **Ex 1 :** Soit z un nombre complexe non nul. On considère les nombres $Z_1 = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z} + 2}$

Déterminer si Z_1 est un nombre réel, un nombre imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.



Toute possession de téléphone portable sera immédiatement sanctionnée par un zéro au devoir et une mise à zéro immédiate du bonus trimestriel. La plupart des devoirs comporteront des indicateurs clairs me permettant d'affirmer qu'un élève a utilisé une intelligence artificielle.

La moindre suspicion (grâce aux indicateurs) impliquera un entretien en tête à tête systématique ...

4 pts **Ex 2 :** Soit f la fonction définie pour tout complexe z différent de $-2i$ par $f(z) = \frac{3z}{z+2i}$.

1) Calculer, en détaillant les calculs, l'image de i , puis celle de $1+i$. (Présenter les résultats sous forme algébrique)

2) Déterminer les invariants de f ?

4 pts **Ex 3 :** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

1) $(z-2i)^2 = -5$. Que peut-on dire des deux solutions obtenues ?

2) $z^2 - \bar{z} = 2$ (aide : poser $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$)

2 pts **Ex 4 :** Dans la formule de Newton avec $(a+b)^{27}$, peut-on trouver un terme en $a^{12}b^{14}$. Si oui, quel est son coefficient ?

3 pts **Ex 5 :** Soit A et B les points d'affixes $z_A=5-i$ et $z_B=4-3i$

Déterminer l'affixe du point E de l'axe des ordonnées, tel que E appartienne à la médiatrice de [AB].

2 pts **Ex 6 :** Déterminer géométriquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|2z - 6 - 4i| = 10$

2 pts **Ex 7 :** 1) En posant $z = x + iy$, écrire $(2i + \bar{z})(1 - z)$ sous forme algébrique.

2) Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $(2i + \bar{z})(1 - z) \in i\mathbb{R}$

1 pts **Ex 8 :** Écrire le nombre complexe ci-dessous sous forme trigonométrique $z_1 = -3\sqrt{3} + 9i$

Ex 1 :

$$\overline{Z_1} = \frac{\overline{z^2 - z^2}}{\overline{z}z + 2} = -\frac{z^2 - \overline{z}^2}{z\overline{z} + 2} = -Z_1, \text{ donc } Z_1 \text{ est un imaginaire pur}$$

Ex 2 :

$$1) f(i) = \frac{3i}{i+2i} = \frac{3i}{3i} = 1 \text{ et } f(1+i) = \frac{3+3i}{1+3i} = \frac{(3+3i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dots = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$$

2) Pour $z \neq -2i$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow \frac{3z}{z+2i} = z \\ &\Leftrightarrow 3z = z(z+2i) \\ &\Leftrightarrow 3z - z(z+2i) = 0 \\ &\Leftrightarrow z(3 - (z+2i)) = 0 \\ &\Leftrightarrow z(3-2i-z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z=3-2i \end{aligned}$$

Ex 3 :

$$1) (z-2i)^2 = -5 \Leftrightarrow (z-2i)^2 = 5i^2 \Leftrightarrow z-2i = \sqrt{5}i \text{ ou } z-2i = -\sqrt{5}i \Leftrightarrow z = i(2+\sqrt{5}) \text{ ou } z = i(2-\sqrt{5})$$

Les deux solutions sont des imaginaires purs.

$$\begin{aligned} 2) \quad z^2 - \overline{z} = 2 &\Leftrightarrow (x+iy)^2 - (x-iy) = 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 - x + iy = 2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - y^2 - x - 2) + iy(2x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x - 2 = 0 \\ y(2x+1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - y^2 - x - 2 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y^2 = -\frac{5}{4} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (impossible car } y \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $S = \{-1, 2\}$



$$\text{cSolve}(z^2 - \text{conj}(z) = 2, z) \quad z = -1 \text{ or } z = 2$$

Ex 4 : Non, car la somme des exposants doit être égale à 27

Ex 5 :

(AB) n'est pas perpendiculaire à l'axe des ordonnées, donc E existe et a une affixe du type bi ou $b \in \mathbb{R}$.

E appartient à la médiatrice de [AB] ssi :

$$\begin{aligned}
 EA=EB &\Leftrightarrow |z_A - z_E| = |z_B - z_E| \\
 &\Leftrightarrow |z_A - z_E|^2 = |z_B - z_E|^2 \\
 &\Leftrightarrow |5 + (-b-1)i|^2 = |4 + (-b-3)i|^2 \\
 &\Leftrightarrow 25 + (b+1)^2 = 16 + (b+3)^2 \\
 &\Leftrightarrow 9 + b^2 + 2b + 1 = b^2 + 6b + 9 \\
 &\Leftrightarrow 4b = 1 \\
 &\Leftrightarrow b = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Ex 6 :

$$|2z - 6 - 4i| = 10 \Leftrightarrow 2|z - 3 - 2i| = 10 \quad |z - 3 - 2i| = 5 \Leftrightarrow |z - (3 + 2i)| = 5 \Leftrightarrow AM = 5 \text{ où } A(3 + 2i)$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre A et de rayon 5.

Ex 7 :

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(2i + \bar{z})(1 - z) = \dots = -x^2 + x - y^2 + 2y + (-2x - y + 2)i$$

$$\begin{aligned}
 &(2 \cdot i + \text{conj}(z)) \cdot (1 - z) \\
 &\quad -x^2 + x - y^2 + 2 \cdot y + (-2 \cdot x - y + 2) \cdot i
 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi : } (2i + \bar{z})(1 - z) \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow -x^2 + x - y^2 + 2y = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 2y = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y - 1)^2 - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $A\left(\frac{1}{2} + i\right)$ et rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\text{Ex 8 : } z_1 = 6\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$