

Chapitre 10 - FONCTION EXPONENTIELLE

1) DÉFINITION

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que :
 $f' = f$ et $f(0) = 1$

Cette fonction, notée \exp , est appelée **fonction exponentielle**.

Preuve : l'existence est admise – l'unicité est facultative mais très intéressante

L'existence d'une fonction f vérifiant les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$ est admise. On la note \exp .

Démontrons son unicité.

Pour cela démontrons tout d'abord que pour tout réel x , on a : $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$

Montrons que $g(x) = 1$:

$x \mapsto \exp(-x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a : $[\exp(-x)]' = -1 \times \exp'(-x) = -\exp(-x)$

g est le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = [\exp(x)]' \times \exp(-x) + \exp(x) \times [\exp(-x)]' = \exp(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times [-\exp(-x)] = 0$$

On en déduit que la fonction g est constante sur \mathbb{R} .

On a $g(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1 \times 1 = 1$.

Puisque g est constante sur \mathbb{R} , on en déduit que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c'est-à-dire que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Considérons une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

$\exp(x)$ étant différent de 0 pour tout réel x , on peut considérer la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$

Montrons que $h(x) = 1$:

h est le quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc h est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times \exp(x) - f(x) \times (\exp(x))'}{(\exp(x))^2} = \frac{f(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

h est donc une fonction constante sur \mathbb{R} .

D'autre part, on a $h(0) = \frac{f(0)}{\exp(0)} = \frac{1}{1} = 1$

Donc pour tout réel x on a :

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\exp(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \exp(x)$$

On en déduit alors l'unicité de la fonction \exp .

2) PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES – NOTATION e^x

Propriété :

Pour tous réels x et y , on a :
 $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Preuve : facultative

Soit y un nombre réel fixé, on a vu que $\exp(y) \neq 0$

Considérons la fonction g de la variable réelle x , définie par $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$

Montrons que g est dérivable sur \mathbb{R} .

$x \mapsto \exp(x+y)$ est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , on a : $[\exp(x+y)]' = (x+y)' \times \exp'(x+y) = 1 \times \exp(x+y) = \exp(x+y)$

D'autre part y étant considérée comme une constante, $\exp(y)$ est aussi une constante donc g est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , on a :

$$g'(x) = \frac{(\exp(x+y))'}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$$

De plus on a $g(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$

g est donc une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$

g est donc la fonction exponentielle (puisque'on a démontré l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions)

On en déduit que pour tout réel x , $g(x) = \exp(x)$ c'est-à-dire $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$

Ceci ayant été démontré quelque soit le réel y , on a justifié que :

Pour tous réels x et y , on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Remarque :

La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :

- f est dérivable sur \mathbb{R}
- $f'(0) = f(0) = 1$
- pour tous réels x et y , $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

Remarque :

En appliquant la relation précédente avec $y = x$, on obtient : $\exp(2x) = [\exp(x)]^2$

En appliquant de nouveau la relation avec $y = 2x$, on obtient : $\exp(3x) = \exp(2x) \times \exp(x) = [\exp(x)]^3$

On peut alors démontrer (*par récurrence en terminale*) que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$

Si on note e le nombre $\exp(1)$, alors pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = e^n$ (*relation que l'on peut aussi vérifier pour un entier négatif*)

Notation :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1)$

La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

Remarque :

Le nombre $e = \exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718.

La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (*Ces deux nombres étant égaux*)

Par contre la notation e^π ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

Propriétés

Pour tous réels a et b , on a :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
 - $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
 - $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$
 - Si n est un entier relatif : $e^{na} = (e^a)^n$ (admise)
- On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.*

Preuve du troisième point :

Propriété : lien avec les suites géométriques

Pour tout réel a , la suite (e^{na}) est une suite géométrique

Preuve :

Remarque :

Outil de passage du discret au continu, la fonction exponentielle permet de modéliser de nombreuses évolutions dans des domaines très variés : calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive ...

3) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété :

Pour tout réel x , $e^x > 0$. La fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} .

Preuve :

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Preuve :

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

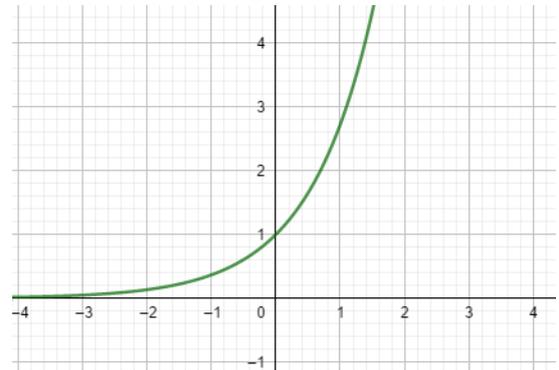
Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "croissance exponentielle", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.

Conséquences :

- | | |
|--|---|
| Pour tous réels a et b
• $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
• $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$ | • $a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$
• $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
• $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$ |
|--|---|

Représentation graphique :

- La courbe passe par les points de coordonnées $(0;1)$ et $(1; e)$
- La courbe est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et ne le coupe jamais.



4) DÉRIVÉE DE $x \mapsto e^{ax+b}$

Propriété :

Soit a et b deux réels.
 La fonction $f : x \mapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = a e^{ax+b}$$

Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$

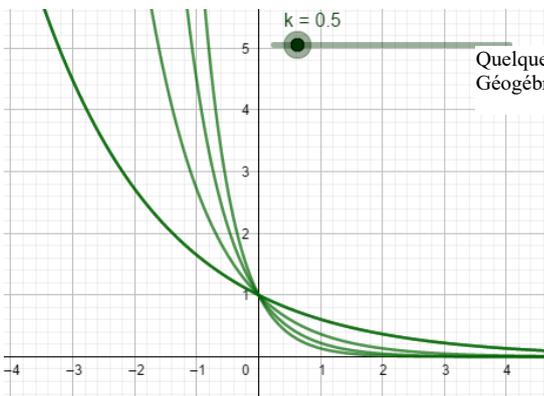
Étude d'exemples importants : Soit k un réel strictement positif.

$f_k : x \mapsto e^{-kx}$

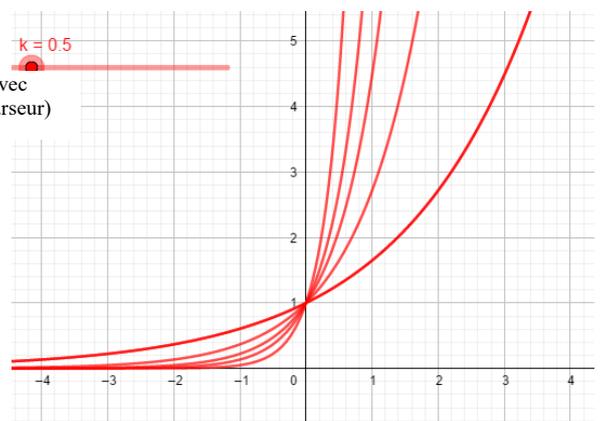
$g_k : x \mapsto e^{kx}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_k(x)$			
f_k			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'_k(x)$			
g_k			



Décroissance exponentielle



Croissance exponentielle

Quelques exemples générés avec Géogebra (en modifiant le curseur)