FONCTION EXPONENTIELLE

1) DÉFINITION

Propriété et définition :

> Il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :
> $$f\,'=f \quad \text{et} \quad f(0)=1$$
> Cette fonction, notée $\exp$, est appelée **fonction exponentielle**.

Preuve : l'existence est admise – l'unicité est faculative mais très intéressante

L'existence d'une fonction f vérifiant les conditions $f\,'=f$ et $f(0)=1$ est admise. On la note $\exp$.
Démontrons son unicité.
Pour cela démontrons tout d'abord que pour tout réel x, on a : $\boxed{\exp(x)\neq 0 \quad \text{et} \quad \exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}}$

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\exp(x)\times\exp(-x)$
Montrons que *g*(*x*)=1 :

$x\longmapsto \exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $[\exp(-x)]'=-1\times\exp'(-x)=-\exp(-x)$

g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$g\,'(x)=[\exp(x)]'\times[\exp(-x)]+[\exp(x)]\times[\exp(-x)]'=\exp(x)\times\exp(-x)+\exp(x)\times[-\exp(-x)]=0$$

On en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.
On a $g(0)=\exp(0)\times\exp(-0)=\exp(0)\times\exp(0)=1\times 1=1$.
Puisque g est constante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $g(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
c'est-à-dire que $\exp(x)\times\exp(-x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Ainsi $\exp(x)\neq 0$ et $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Considérons une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f\,'=f$ et $f(0)=1$
$\exp(x)$ étant différent de 0 pour tout réel x, on peut considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{f(x)}{\exp(x)}$
Montrons que *h*(*x*)=1 :

h est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$h\,'(x)=\frac{f\,'(x)\times\exp(x)-f(x)\times(\exp(x))'}{(\exp(x))^2}=\frac{f(x)\times\exp(x)-f(x)\times\exp(x)}{(\exp(x))^2}=0$$

h est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, on a $h(0)=\dfrac{f(0)}{\exp(0)}=\dfrac{1}{1}=1$
Donc pour tout réel x on a :
$$h(x)=1\Leftrightarrow\frac{f(x)}{\exp(x)}=1\Leftrightarrow f(x)=\exp(x)$$
On en déduit alors l'unicité de la fonction $\exp$.

2) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES – NOTATION e^x

Propriété :

> Pour tous réels x et y, on a :
> $$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Preuve : faculative

Soit y un nombre réel fixé, on a vu que $\exp(y)\neq 0$
Considérons la fonction g de la variable réelle x, définie par $g(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$
Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x\longmapsto\exp(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $[\exp(x+y)]'=(x+y)'\times\exp'(x+y)=1\times\exp(x+y)=\exp(x+y)$
D'autre part y étant considérée comme une constante, $\exp(y)$ est aussi une constante donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :
$$g\,'(x)=\frac{(\exp(x+y))'}{\exp(y)}=\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}=g(x)$$
De plus on a $g(0)=\dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)}=1$
g est donc une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g\,'=g$ et $g(0)=1$
g est donc la fonction exponentielle (puisqu'on a démontré l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions)
On en déduit que pour tout réel x, $g(x)=\exp(x)$ c'est-à-dire $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}=\exp(x)$
Ceci ayant été démontré quelque soit le réel y, on a justifié que :
Pour tous réels x et y, on a $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

Remarque :
La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(0)=f'(0)=1$
- pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

Remarque :
En appliquant la relation précédente avec $y=x$, on obtient : $\exp(2x)=[\exp(x)]^2$
En appliquant de nouveau la relation avec $y=2x$, on obtient : $\exp(3x)=\exp(2x)\times\exp(x)=[\exp(x)]^3$
On peut alors démontrer (*par récurrence en terminale*) que pour tout entier naturel n, on a : $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$
On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n, on a : $\exp(n)=\exp(n\times 1)=[\exp(1)]^n$
Si on note e le nombre $\exp(1)$, alors pour tout entier naturel n, on a : $\exp(n)=\mathrm{e}^n$ (*relation que l'on peut aussi vérifier pour un entier négatif*)

Notation :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x)=\mathrm{e}^x$ où $\mathrm{e}=\exp(1)$
La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \mathrm{e}^x$$

Remarque :
Le nombre $\mathrm{e}=\exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718.
La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (*Ces deux nombres étant égaux*)
Par contre la notation e^{π} ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

Propriétés

Pour tous réels a et b, on a :
- $\mathrm{e}^{a+b}=\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\mathrm{e}^b \neq 0$ et $\mathrm{e}^{-b}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^b}$
- $\mathrm{e}^{a-b}=\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
- Si n est un entier relatif : $\mathrm{e}^{na}=(\mathrm{e}^a)^n$ (admise)

Preuve du troisième point :

Pour tous réels a et b, on peut écrire : $\mathrm{e}^{a-b}=\mathrm{e}^{a+(-b)}=\mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^{-b}=\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$

Propriété : lien avec les suites géométriques

Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique

Preuve :
Soit a un réel. On définit la suite (u_n) par $u_n=\mathrm{e}^{na}$.
Pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}=\mathrm{e}^{na+a}=\mathrm{e}^{na}\times\mathrm{e}^a$.
Ainsi, la suite (u_n) est géométrique de raison e^a et de premier terme $u_0=\mathrm{e}^0=1$

Remarque :
Outil de passage du discret au continu, la fonction exponentielle permet de modéliser de nombreuses évolutions dans des domaines très variés : calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive ...

3) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété :

Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$. La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Preuve :
Pour tout reel x, on peut écrire : $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{2\times\frac{x}{2}}=\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2$

Le carré d'un nombre étant toujours positif, on en déduit que $\mathrm{e}^x\geqslant 0$.
Et comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^x\neq 0$ on obtient $\mathrm{e}^x>0$.

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :
On sait que $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$ et on a vu que $\mathrm{e}^x>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle croît très vite
(par exemple : $\mathrm{e}^{50}\approx 5\times 10^{21}$)

Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "croissance exponentielle", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.

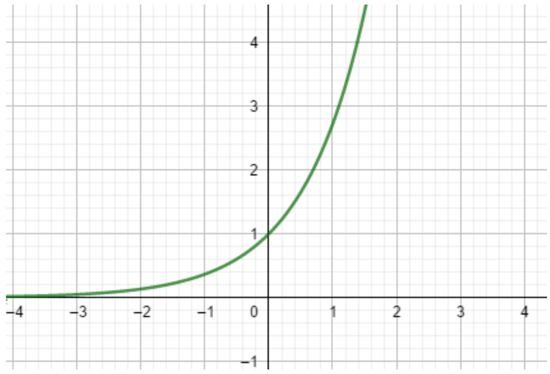
Conséquences :

Pour tous réels a et b
- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow e^a \leqslant e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Représentation graphique :

- La courbe passe par les points de coordonnées (0;1) et (1; e)

- La courbe est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et ne le coupe jamais.



4) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto e^{ax+b}$

Propriété :

Soit a et b deux réels.
La fonction $f : x \longmapsto e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = a\,e^{ax+b}$$

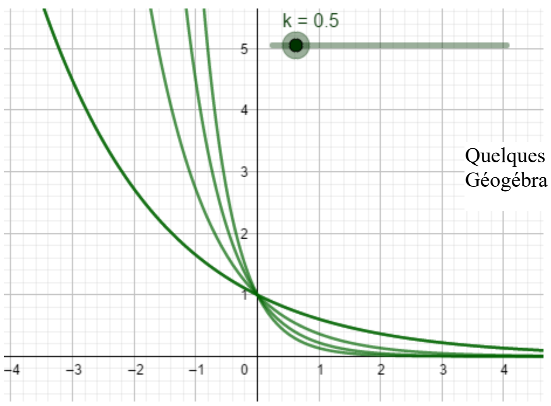
Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$

Étude d'exemples importants : Soit k un réel strictement positif .

$f_k : x \longmapsto e^{-kx}$

La fonction f_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , $f'_k(x) = -k\,e^{-kx}$ et donc $f'_k(x) < 0$.
La fonction f_k est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	
f_k	↘	1	↘



Décroissance exponentielle

$g_k : x \longmapsto e^{kx}$

La fonction g_k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , $g'_k(x) = k\,e^{kx}$ et donc $g'_k(x) > 0$.
La fonction g_k est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'_k(x)$		$+$	
g_k	↗	1	↗

Quelques exemples générés avec Géogébra (en modifiant le curseur)

Croissance exponentielle