

Chapitre 11 - DROITES ET CERCLES DANS UN REPÈRE

1) DROITES

A) RAPPELS DE SECONDE

Définition :

Soit d une droite du plan.

On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur \vec{u} non nul tel qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overline{AB}$.

Remarques :

- Un vecteur directeur indique la direction de d . On dit aussi que le vecteur directeur dirige la droite.
- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
- Deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Propriété :

- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a , b et c sont trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls. (On note $(a; b) \neq (0; 0)$)
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d . Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
- Dans un repère du plan, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a , b et c sont trois réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ est une équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

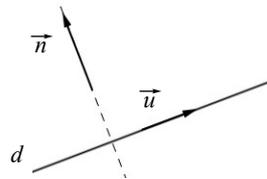
Remarque : Il n'y a pas unicité de l'équation d'une droite car si $2x - y - 1 = 0$ est une équation de la droite d , $2y = 4x - 2$ en est une autre, ainsi que $y = 2x - 1$ (qui est l'**équation réduite**)

Exemple : Déterminer l'équation de la droite d passant par $A(1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

B) VECTEUR NORMAL À UNE DROITE

Définition :

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .



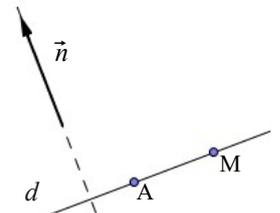
Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et un \vec{n} vecteur normal à d .

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
C'est à dire

$$M \in d \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que \overline{AM} et \vec{n} sont orthogonaux ...



Remarque : Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires on peut utiliser le produit scalaire et les vecteurs normaux.

C) APPLICATION : ÉQUATION D'UNE DROITE DONT ON CONNAIT UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

- Si le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (où c est un réel)
- Réciproquement, toute droite ayant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (où $(a; b) \neq (0; 0)$) admet le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Preuve :

- Soit $A(x_0; y_0)$ un point de d et $M(x; y)$ un point du plan, alors :

- Si la droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Or $\vec{n} \cdot \vec{u} = a(-b) + b a = 0$

Ainsi \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux et \vec{n} est normal à d .

2.) CERCLES

A) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

Propriété :

Soit A un point du plan et r un réel positif.
Le cercle C de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $AM^2 = r^2$

Preuve :

Soit M un point du plan .

APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

On se place dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A(x_0; y_0)$, un réel positif r et C le cercle de centre A et de rayon r .

Pour tout point $M(x; y)$ du plan,

On a alors $\vec{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ et $AM^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$

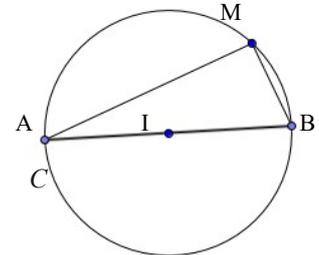
Le cercle C est donc l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

B) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ

Propriété : Déjà vue dans le chapitre sur le produit scalaire

Soit A et B deux points distincts du plan.

La cercle C de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$



APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ

Étude d'un exemple :

On se place dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminons une équation du cercle C de diamètre $[AB]$ avec $A(-1; 3)$ et $B(2; 2)$.

Remarque :

En développant $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ on obtient une équation de la forme $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ (où a, b et c sont des réels), mais récioproquement une équation de cette forme ne représente pas toujours un cercle .

Exemple :