# DROITES ET CERCLES DANS UN REPÈRE

## 1 ) DROITES

### A ) RAPPELS DE SECONDE

**Définition :**

Soit $d$ une droite du plan.

On appelle **vecteur directeur** de $d$ tout vecteur $\vec{u}$ non nul tel qu'il existe deux points distincts A et B de $d$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

**Remarques :**

- Un vecteur directeur indique la direction de $d$ . On dit aussi que le vecteur directeur dirige la droite.
- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
- Deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**Propriété :**

- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où $a$ , $b$ et $c$ sont trois réels tels que $a$ et $b$ ne sont pas simultanément nuls. ( On note $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ )
  Cette équation est appelée **équation cartésienne** de $d$ . Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$
- Dans un repère du plan, toute équation de la forme $ax+by+c=0$ où $a$ , $b$ et $c$ sont trois réels tels que $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ est une équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

**Remarque :** Il n'y a pas unicité de l'équation d'une droite car si $2x-y-1=0$ est une équation de la droite $d$, $2y=4x-2$ en est une autre, ainsi que $y=2x-1$ (qui est l'**équation réduite**)

**Exemple :** Déterminer l'équation de la droite $d$ passant par $\text{A}(1\ ;\ 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

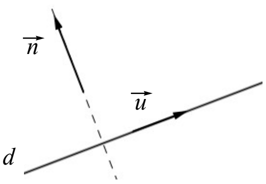
Soit $\text{M}(x\ ;\ y)$ un point du plan.
On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$
$\text{M}\in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est à dire :

$$\det(\overrightarrow{AM}\ ,\ \vec{u})=0 \Leftrightarrow (x-1)\times 1-(-1)\times(y-2)=0 \Leftrightarrow x-1+y-2=0 \Leftrightarrow x+y-3=0 \Leftrightarrow y=-x+3$$

### B ) VECTEUR NORMAL À UNE DROITE

**Définition :**

Un **vecteur normal** à une droite $d$ est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de $d$.



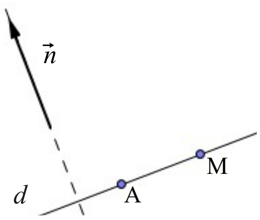

**Propriété :**

Soit $d$ une droite, A un point de $d$ et un $\vec{n}$ vecteur normal à $d$.

La droite $d$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ .
C'est à dire

$$\text{M}\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$

La droite $d$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux …




**Remarque :** Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires on peut utiliser le produit scalaire et les vecteurs normaux.

### C ) APPLICATION : ÉQUATION D'UNE DROITE DONT ON CONNAIT UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

**Propriété :**

Soit $(\text{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ un repère orthonormal et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

- Si le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite $d$ , alors $d$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$ ( où $c$ est un réel )
- Réciproquement, toute droite ayant une équation de la forme $ax+by+c=0$ (où $(a\ ;b)\neq(0\,;0)$) admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

**Preuve :**

- Soit $A(x_0\,;\,y_0)$ un point de $d$ et $M(x\,;\,y)$ un point du plan , alors :

On a $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$

Ainsi : $M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,.\,\vec{n}=0 \Leftrightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Leftrightarrow ax+by-(ax_0+by_0)=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$ (en posant $c=-(ax_0+by_0)$)

- Si la droite $d$ a pour équation $ax+by+c=0$ , alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $d$ .

  Or $\vec{n}\cdot\vec{u}=a(-b)+b\,a=0$

  Ainsi $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux et $\vec{n}$ est normal à $d$ .

## 2 ) CERCLES

### A ) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

**Propriété :**

Soit A un point du plan et $r$ un réel positif.
Le cercle $C$ de centre A et de rayon $r$ est l'ensemble des points M du plan tels que $AM^2=r^2$

**Preuve :**
Soit M un point du plan .

$M\in C \Leftrightarrow AM=r \Leftrightarrow AM^2=r^2$

**APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS**

On se place dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j})$.
Soit $A(x_0\,;\,y_0)$ , un réel positif $r$ et $C$ le cercle de centre A et de rayon $r$.

Pour tout point $M(x\,;\,y)$ du plan,
On a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $AM^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

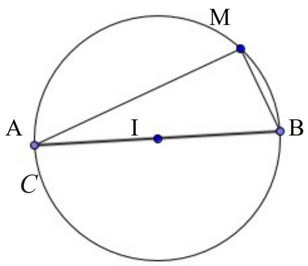
Le cercle $C$ est donc l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

### B ) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ

**Propriété :** Déjà vue dans le chapitre sur le produit scalaire

Soit A et B deux points distincts du plan.

La cercle $C$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$




**APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ**

**Étude d'un exemple :**

On se place dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j})$.
Déterminons une équation du cercle $C$ de diamètre [AB] avec $A(-1\,;3)$ et $B(2\,;2)$ .

Soit $M(x\,;\,y)$ un point du plan .

On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-1-x\\3-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}2-x\\2-y\end{pmatrix}$

Ainsi : $M\in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow (-1-x)(2-x)+(3-y)(2-y)=0 \Leftrightarrow x^2-x+y^2-5\,y+4=0$

**Remarque :**

En développant $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ on obtient une équation de la forme $x^2+y^2+2\,ax+2\,by+c=0$ (où $a$ , $b$ et $c$ sont des réels) , mais réciproquement une équation de cette forme ne représente pas toujours un cercle .

**Exemple :** $x^2+y^2-x-3\,y+3=0 \Leftrightarrow (x^2-x)+(y^2-3\,y)+3=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+3=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$

Ce qui est impossible . L'ensemble des points vérifiant cette relation est donc l'ensemble vide.