TRIGONOMÉTRIE

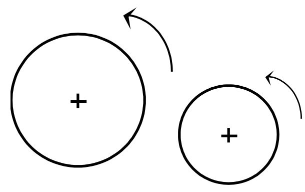
1) ORIENTATION DU PLAN

Définition :

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif).
L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.
(appelé aussi **sens trigonométrique**)

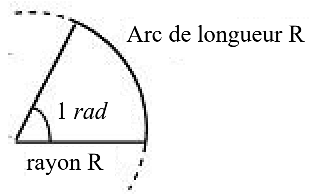
Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



2) MESURE DES ANGLES EN RADIAN

Définition :

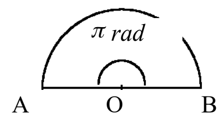
On appelle **radian** (*rad*) la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de longueur R.



Remarques :

- Un angle au centre plat intercepte un arc de longueur π R . Il a donc pour mesure π radians.

- Les mesures d'un angle en radian et en degré sont proportionnelles. (heureusement)
  Il en découle que l 'on peut faire les conversions de mesures à l'aide d'un tableau de proportionnalité :



mesures en degré	180	360	90	45	60	30
mesures en radian	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

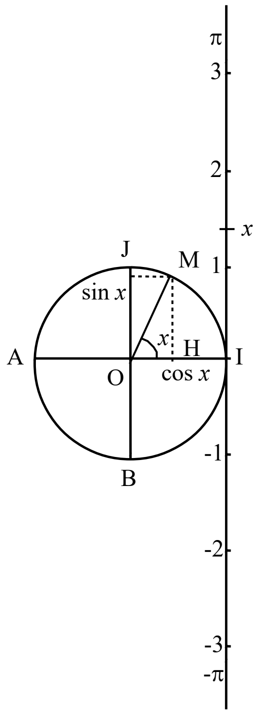
$\frac{\pi}{180}$

- $1\ rad \approx 57{,}3\,°$ $\qquad 1° = \frac{\pi}{180}\ rad \approx 0{,}0175\ rad$
- L'arc intercepté par un angle au centre de x radians sur un cercle de rayon R a pour longueur x R .
  Si le cercle a pour rayon 1 , alors l'arc a pour longueur x

3) L'ENROULEMENT DE LA DROITE NUMÉRIQUE

Dans le repère orthonormé $(O;I;J)$, on considère le cercle trigonométrique de centre O.
Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.

Tout point de l'axe correspond à **un point** du cercle.
Tout point du cercle est associé à **une infinité** de points de l'axe, donc à une infinité de nombres réels.
Plus généralement, au réel x est associé le point M du cercle et au point M sont associés les réels x, $x+2\pi$, $x+4\pi$, $x-2\pi$, $x-4\pi$, etc...



Par exemple, la longueur d'un quart de cercle de rayon 1 étant $\frac{2\pi}{4}$ soit $\frac{\pi}{2}$,
le point J est associé à $\frac{\pi}{2}$, mais aussi à $\frac{\pi}{2}+2\pi$, $\frac{\pi}{2}+4\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$
(après un ou deux tours dans le sens positif, ou un tour dans le sens négatif)

Définitions :

À tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique par enroulement de la droite des réels.
Ce point M est unique.

- L'abscisse x_M du point M est le **cosinus** de x (noté cos x)

- L'ordonnée y_M du point M est le **sinus** de x (noté sin x)

Exemples :

$\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$; $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$; $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

4) LIEN AVEC LES FORMULES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Lorsque M appartient à l'arc $\overset{\frown}{IJ}$ parcouru dans le sens direct (bornes exclues), ses coordonnées sont strictement positives.
Ainsi pour un angle aigu $\widehat{IOM}$ (mesure comprise entre 0° et 90° ou entre 0 rad et $\frac{\pi}{2}$ rad) les grandeurs $\cos x$ et $\sin x$ peuvent être interprétées comme des rapports de longueurs.

On retrouve les notions vues en troisième dans le triangle rectangle.

Propriété :

Dans le triangle HOM rectangle en H, on a :

$$\cos \widehat{HOM} = \frac{OH}{OM} = \frac{x_M}{1} = \cos x \qquad \text{et} \qquad \sin \widehat{HOM} = \frac{HM}{OM} = \frac{y_M}{1} = \sin x$$

5) VALEURS REMARQUABLES DU SINUS ET DU COSINUS

x (en degré)	0	30	45	60	90
x (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

6) PROPRIÉTÉS DU SINUS ET DU COSINUS

Propriétés :

Pour tout réel x, on a :

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

On note $\cos^2 x = (\cos(x))^2$ et $\sin^2 x = (\sin(x))^2$

Preuve :

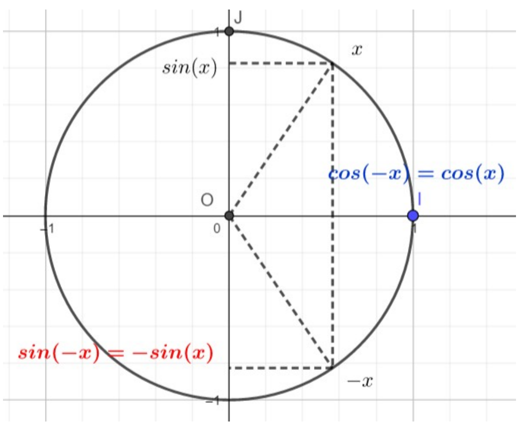
- Preuve de : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

  On a toujours $-1 \leqslant x_M \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y_M \leqslant 1$

- Preuve de : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

  Se montre grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHM

- Preuve de : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$



7) LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

A) DÉFINITION

Définition :

- La **fonction cosinus**, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \cos(x)$
- La **fonction sinus**, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto \sin(x)$

B) PARITÉ

On a vu que pour tout réel x, $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$. On en déduit que :

Propriété :

- La fonction cos est **paire**.
- La fonction sin est **impaire**.

Interprétation graphique dans un repère orthogonal :

- La représentation graphique de la fonction cos admet donc l'**axe des ordonnées** pour **axe de symétrie**.
- La représentation graphique de la fonction sin admet donc **l'origine du repère** pour **centre de symétrie**.

C) PÉRIODICITÉ

On a vu aussi que pour tout réel x, $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$. On dit que :

Propriété :

Les fonctions cos et sin sont **périodiques** de période 2π

Interprétation graphique dans un repère :

Il suffit de représenter ces courbes sur un intervalle d'amplitude 2π, puis on complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

D) VARIATIONS SUR $[0;\pi]$

On déduit ces deux tableaux du cercle trigonométrique :

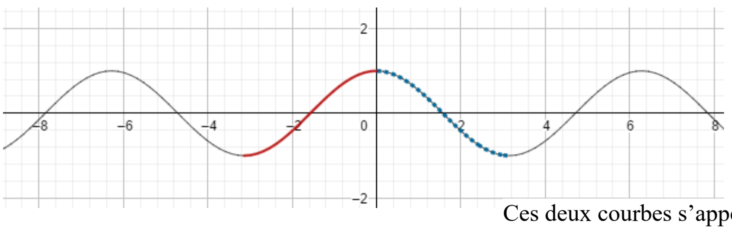
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	1	↘	0	↘	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	↗	1	↘	0

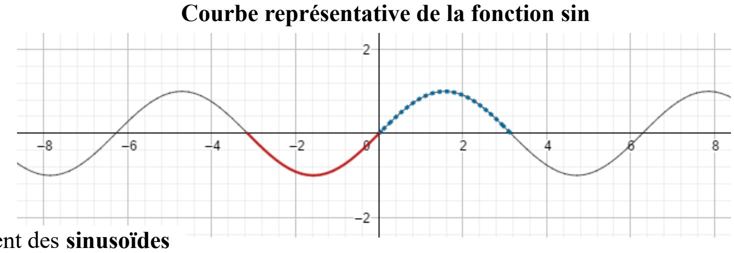
E) COURBES REPRÉSENTATIVES

- En établissant un tableau de valeurs, on trace les courbes représentatives des fonctions sin et cos sur $[0;\pi]$
- La fonction cos est paire . On complète la courbe sur $[-\pi;\pi]$, en utilisant la symétrie d'axe $(\mathrm{O}\,x)$.
- La fonction sin est impaire . On complète la courbe sur $[-\pi;\pi]$, en utilisant la symétrie de centre O.
- Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π . On complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k\in\mathbb{Z})$

Courbe représentative de la fonction cos



Courbe représentative de la fonction sin



Ces deux courbes s'appellent des **sinusoïdes**