APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

1) DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

A) DU SENS DE VARIATION AU SIGNE DE LA DÉRIVÉE

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.
- Si f est croissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

Preuve : (de la première propriété … les deux autres se démontrent de la même façon)

Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in I$.
f est croissante sur I; elle conserve donc le sens des inégalités.
Ainsi les différences $f(x+h) - f(x)$ et $(x+h) - x$ ont le même signe.
On en déduit que le rapport $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est toujours positif.
f est dérivable en x donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ admet une limite finie $f'(x)$ lorsque h tend vers 0.
Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs positives et sa limite en 0 est donc nécessairement positive.
On a donc $f'(x) \geqslant 0$.

B) DU SIGNE DE LA DÉRIVÉE AU SENS DE VARIATION

Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarques :
- Si la dérivée f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si la dérivée f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 9$.
f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.
$f'(0) = 0$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) > 0$.
Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$+$	
f		$\nearrow$	9	$\nearrow$	

On indique :
- le signe de f'
- les zéros de f'
- les valeurs de f pour les zéros de f'

On ne met jamais de valeurs approchées dans un tel tableau...

Attention : Il est fondamental de se placer sur **un intervalle**.

Exemple :

La fonction inverse $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
Et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, ce qui est strictement négatif sur $\mathbb{R}^*$.
Comme vous le savez … f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$; elle l'est indépendamment sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

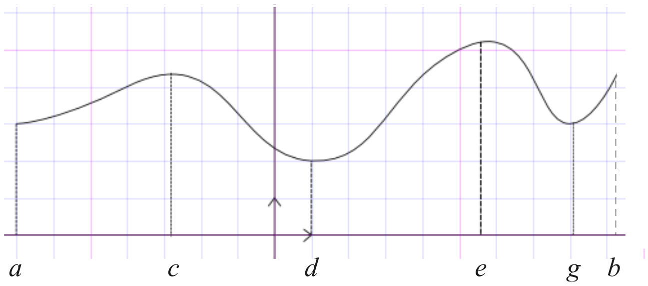
Remarques :

Pour étudier le sens de variation d'une fonction il n'est pas toujours utile de dériver . N'oubliez pas :
- **La définition**
- **les sommes de fonctions**

  Exemple : Soit $f : x \longmapsto x^2 + x - 2$
  On peut écrire, $f = u + v$ où $u : x \longmapsto x^2$ et $v : x \longmapsto x - 2$.
  u et v sont deux fonctions croissantes sur $[2\,;+\infty[$; donc f est croissante sur $[2\,;+\infty[$.

2) EXTREMUM D'UNE FONCTION

A) LA NOTION D'EXTREMUM LOCAL (ou relatif)



Sur l'intervalle $[a\,;b]$, la fonction f représentée ci-contre admet un maximum en e et un minimum en d.
« Autour » de c et de g , on remarque que le comportement de f n'est pas banal …
On constate que *localement* f admet un maximum en c et un minimum en g.

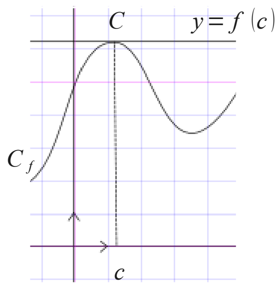
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I distinct des extrémités.
On dit que f admet un maximum local (respectivement un minimum local) en c si $f(c)$ est le maximum (respectivement minimum) de f restreinte à un intervalle **ouvert** contenant c.

Remarque sur les extrémités :
Sur un intervalle fermé $[a\,;b]$, on peut définir un extremum local en a ou en b.
Par exemple, dire que $f(a)$ est un maximum local signifie que $f(a)$ est le maximum de f sur un intervalle $[a\,;\alpha[$, où $\alpha \leqslant b$.

Les fonctions que nous étudierons cette année admettront toujours un extremum en a et en b.

B) QUEL LIEN AVEC LA DÉRIVATION ?



Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c un réel de I.

Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$

Conséquences graphiques:

On a $f'(c) = 0$, ainsi le coefficient directeur de la tangente à C_f en C est nul; la tangente est horizontale.

Remarques :

- Il est important que I soit ouvert .
  Exemple : $f : x \longmapsto x^2$ et $I = [0\,;1]$, $f(1) = 1$ est le maximum de f sur I et pourtant $f'(1) = 2$ …
- Une fonction non dérivable en un réel peut admettre un extremum en ce réel.
  Exemple : Pensez à la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 …
- La réciproque de ce théorème est fausse: Si $f'(c) = 0$, on n'a pas forcément un extremum en c.
  Exemple : $f : x \longmapsto x^3$, $f'(0) = 0$ et pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local de f, mais un point d'inflexion...

Pour fixer les idées, on choisit les extremums éventuels de f parmi les réels c vérifiant :
- c est une borne de I ,
- c est un réel où f n'est pas dérivable ,
- c est un réel où f est dérivable et tel que $f'(c) = 0$ … mais comment choisir ?

Deux configurations à retenir :
Supposons que l'on puisse extraire du tableau de variation d'une fonction une telle configuration…

x	…	c	…
signe de f'	+	0	–
f	↗	$f(c)$	↘

x	…	c	…
signe de f'	–	0	+
f	↘	$f(c)$	↗

La dérivée s'annule et change de signe … il semble que l'on soit en présence d'un extremum local .

Propriété : admise

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.
Si la dérivée f' **s'annule** en c en **changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I.