Ex 6-1 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Si une fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est négative.

2) Si f est une fonction dont la dérivée est nulle, alors f est constante.

3) Si f est une fonction dérivable en a telle que $f'(a)=0$, alors f admet un maximum local en a.

4) Une fonction f admet un maximum local en 3 sur $[1;4]$ s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[$ inclus dans $[1;4]$ et contenant 3 tel que pour tout x appartenant à $]a;b[$, on a $f(x)\leqslant f(3)$.

5) Si une fonction f admet un maximum local en a, alors f est dérivable en a.

Ex 6-2 : Déterminer les variations d'une fonction

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de f sur I, puis déterminer les éventuels extrema de f.

1) $f:x \longmapsto x^5-1$, $I=\mathbb{R}^+$

2) $f:x \longmapsto \sqrt{2x+1}$, $I=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

3) $f:x \longmapsto x+\frac{3}{x}$, $I=[1;4]$

4) $f:x \longmapsto \frac{x-1}{2-x}$, $I=\mathbb{R}-\{2\}$

5) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $\mathrm{I}=[0;1]$

6) $f : x \longmapsto (x^2+3)^2$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

7) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}-x$, $\mathrm{I}=\left[\dfrac{1}{4};6\right]$

Ex 6-3 : Variations : deux méthodes

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de f sur I en utilisant la définition d'une fonction croissante/décroissante, puis vérifier le résultat grâce à la dérivée.

1) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\mathrm{I}=[1;3]$

2) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2+2}$, $\mathrm{I} = \mathbb{R}^+$

3) $f : x \longmapsto -x^4+1$, $\mathrm{I} = [1;3]$

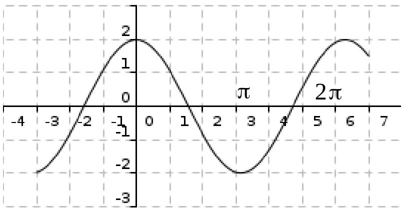
4) $f : x \longmapsto \sqrt{x}(x+3)$, $\mathrm{I} = [3;5]$

5) $f : x \longmapsto -x^8-x^2$, $\mathrm{I} = [-5;5]$

6) $f : x \longmapsto |x-1|$, $I=[-1;3]$

<u>Ex 6-4 :</u> À partir d'une courbe

On considère une fonction f dérivable sur $I=[-3;7]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



1) Déterminer les variations de f sur I, ainsi que le signe de sa dérivée.

2) Déterminer tous les extrema locaux de f .

<u>Ex 6-5 :</u> Montrer des inégalités

Démontrer, à l'aide d'une étude de fonction, chacune des inégalités proposées sur l'intervalle I.

1) $\frac{1}{1-x} \leqslant x-3$, $I=[2;+\infty[$

Aide : faire le tableau de variation sur I de $d : x \longmapsto \frac{1}{1-x}-(x-3)$

2) $x^2 \geqslant x\sqrt{x}-\frac{1}{2}$, $I=]0;4]$

3) $\frac{\sqrt{x}}{1+x} \leqslant \frac{1}{2}$, $I =]0;2]$

4) $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, $I = \mathbb{R}_+^*$

Retrouver ce résultat en développant $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

<u>Ex 6-6 :</u> Trouver une fonction vérifiant des conditions

Dans chacun des cas suivants, donner un exemple d'une fonction (ou d’une représentation graphique de fonction) vérifiant la ou les conditions(s) proposée(s) :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est négative sur $\mathbb{R}$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}^*$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^+$, dérivable uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un maximum local en 4.

6) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0.

Ex 6-7 : Encadrement

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{5}{2} ; 3\right]$ par $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-3$.

1) Étudier les variations de f (faire un tableau de variation)

2) Déterminer le maximum et le minimum de $f(x)$ sur $\left[-\frac{5}{2} ; 3\right]$

En déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $\left[-\frac{5}{2} ; 3\right]$

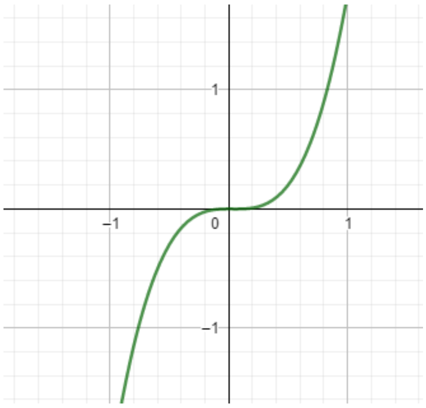
3) Déterminer le meilleur encadrement possible de $|f(x)|$ sur $\left[-\frac{5}{2} ; 3\right]$

Ex 6-8 : Attention à la représentation graphique

Zineb a représenté à l'aide de GeoGebra la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3-0,2x^2$.

Elle affirme que la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

A-t-elle raison ?



Ex 6-9 : Trinôme du second degré

1) Démontrer en utilisant la dérivation le résultat déjà vu sur les variations d'un trinôme du second degré $f: x \longmapsto ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$)

2) Écrire un algorithme qui, à partir des valeurs connues a , b et c , indique la valeur de l'extremum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, ainsi que la valeur en laquelle il est atteint . Traduire cet algorithme en Python.

Ex 6-10 : Position relative d'une courbe et d'une tangente en un point

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^3-2x$

1) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f .

2) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f représentative de f au point A d'abscisse 1.

3) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x-2$.

a) Montrer que $f(x)-g(x)=(x-1)(x^2+x-2)$

b) Étudier le signe de $h(x)=f(x)-g(x)$.

c) En déduire la position relative de C_f par rapport à T .

Ex 6-11 : Position relative de deux courbes

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+3x+1$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $g(x)=-\dfrac{1}{x+2}$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives des fonctions f et g .

1) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

2) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $h(x)=f(x)-g(x)$.

a) Développer $(x+1)^2(x+3)$

b) Étudier le signe de $h(x)$.

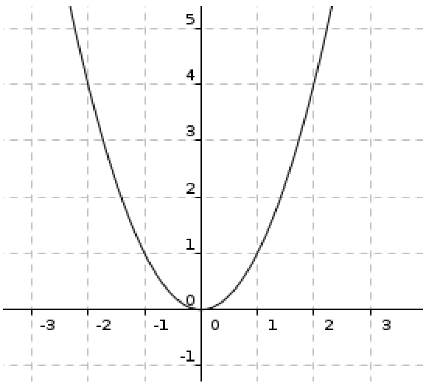
c) Déterminer la position relative de C_f par rapport à C_g .

4) Démontrer que C_f et C_g admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection . Donner une équation de cette tangente.

Ex 6-12 : Étude de fonctions convexes

1) Soit $f: x \longmapsto x^2$ et C_f sa courbe représentative donnée ci-dessous :

Tracer les tangentes à C_f aux points d'abscisses -2, -1, 0, 1 et 2.
Quelle semble être la position de chacune de ces tangentes par rapport à C_f .



2) Soit a un réel . Déterminer l'équation $y=g_a(x)$ de la tangente à C_f au point d'abscisse a .

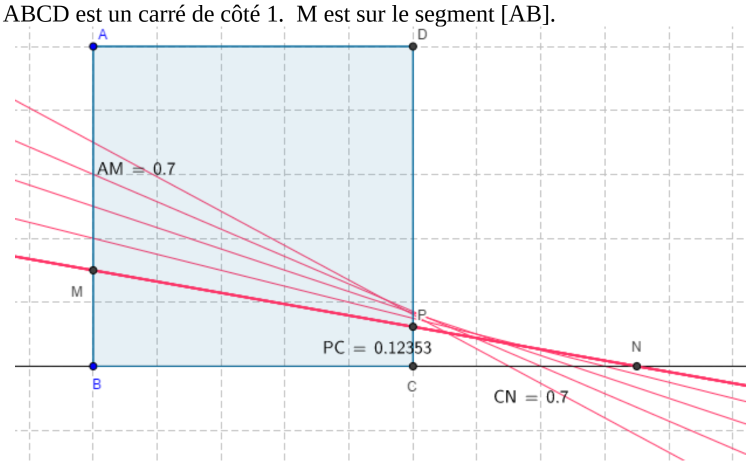
Démontrer alors que, pour tout réel x , on a $f(x)\geqslant g_a(x)$.
Une telle fonction est dite convexe.

3) La fonction inverse est-elle convexe sur $]-\infty;0[$?
Démontrer en revanche qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

Problèmes d'optimisation

Ex 6- 13 : Distance maximale

ABCD est un carré de côté 1. M est sur le segment [AB].



On place le point N tel que CN=AM sur la demi droite [BC) à l'extérieur du segment [BC].

La droite (MN) coupe (DC) en P . On pose $\text{AM}=x$ avec $0\leqslant x\leqslant 1$.

Le but de l'exercice est de trouver M sur [AB] tel que la distance PC soit maximale.

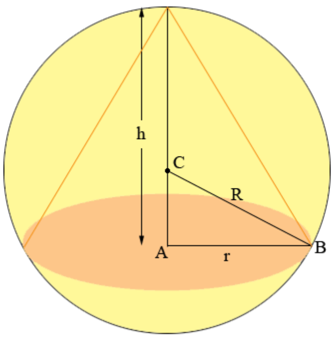
1) Démontrer que $\text{PC}=\dfrac{x-x^2}{1+x}$

2) a) Étudier les variations de la fonction f définie sur [0;1] par $f(x)=\dfrac{x-x^2}{1+x}$

b) En déduire la valeur de x pour laquelle la distance PC est maximale.

Ex 6- 14 : Cône : volume maximal

Dans une sphère de centre C et de rayon R, on inscrit un cône de révolution de hauteur h.



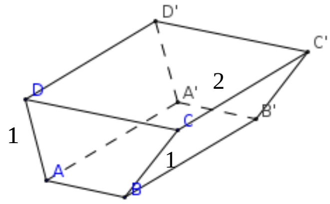
1) Démontrer que le rayon r de la base du cône est égal à $\sqrt{h(2\mathrm{R}-h)}$

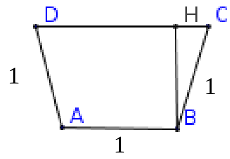
2) a) Calculer le volume du cône en fonction de h .

b) Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ?

Ex 6- 15 : Prisme : volume maximal

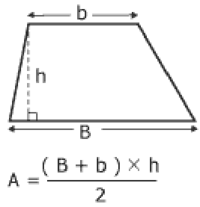
Une benne à la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle ABCD.





La longueur du côté CD est variable.
Les autres dimensions sont fixes. On désigne par x la longueur CH où H est le projeté orthogonal de B sur (CD). On se propose de déterminer x de façon que la benne ait un volume maximal.

1) Calculer en fonction de x l'aire $S(x)$ du trapèze isocèle ABCD, puis le volume $V(x)$ de la benne.



2) Démontrer que $S'(x)$ peut s'écrire sous la forme $S'(x)=\dfrac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (utiliser la formule $\sqrt{u}'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$)

3) Étudier le sens de variation de S puis de V.

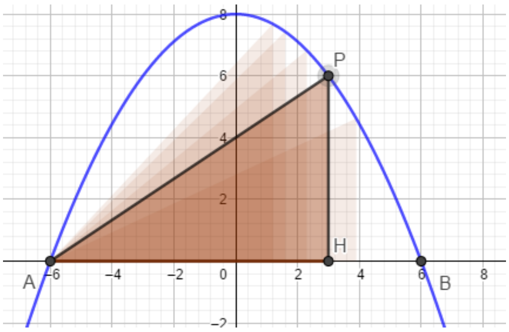
4) Pour quelle valeur de x le volume de la benne est-il maximal ?

5) Quel est alors le volume de la benne et quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{CBH}$?

Ex 6- 16 : Parabole et aire maximale

La parabole d'équation $y=-\frac{2}{9}x^2+8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.

Le point $P(x;y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.



Le but du problème est de déterminer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle rectangle AHP soit maximale.

1) Déterminer les coordonnées des points A et B.

2) On note $f(x)$, l'aire du triangle en fonction de x .
a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Montrer que $f(x)=-\frac{1}{9}x^3-\frac{2}{3}x^2+4x+24$

3) Étudier les variations de f .

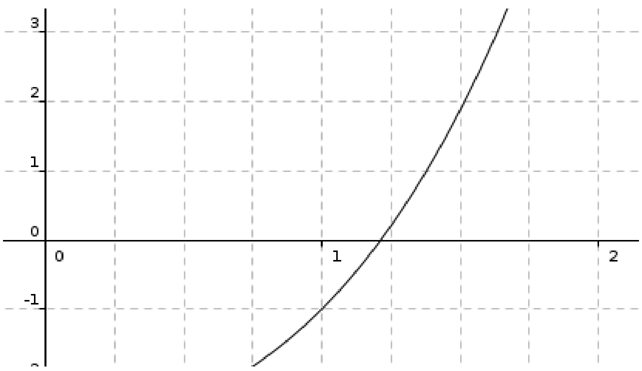
4) Répondre au problème posé.

Algorithme – Python

Ex 6-17 : Méthode de Newton-Raphson

1) **Introduction :**

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On constate que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont nous allons déterminer une valeur approchée.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0=\frac{3}{2}$.

T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A .
Déterminer l'abscisse x_1 de A .

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 . Que dire de x_2 ?

2) **Mise en place de l'algorithme :**

Revenons sur le cas général . Soit f une fonction dont la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x)=0$ admette une unique solution α . On note C_f sa courbe représentative . Soit x_0 un réel supérieur à α .

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$. Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs x_1 , … , x_{10} .
(A faire pour un polynôme de degré 3 quelconque)

```
def f(a,b,c,d,x):
 return …………..

def der_f(a,b,c,x):
 return …………..

a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
d=float(input("d="))
x=float(input("x="))
for i in range(1,……):
    x=…………..…………..
    print(x)
```

d) On se propose maintenant de trouver un réel x tel que $|f(x)|<10^{-p}$ et en insérant un compteur .
Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```
def f(a,b,c,d,x):
 return a*x**3+b*x**2+c*x+d

def der_f(a,b,c,x):
 return 3*a*x**2+2*b*x+c

a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
d=float(input("d="))
x=float(input("x="))
p=int(input("p="))
nb_etape= …………..
while  ………….. ………….. …………..:
    x=x-f(a,b,c,d,x)/der_f(a,b,c,x)
    nb_etape= …………..
print(x,"en",nb_etape,"étapes")
```

3) **Application :**
Étudier la fonction $g: x \longmapsto x^3-x^2+2x$, vérifier que sa fonction dérivée est strictement positive, puis que l'équation $g(x)=1$ admet une unique solution α .

En utilisant le second programme, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.