Définition et notations

Ex 7-1 : Notations, termes, indices

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$, par : 0 ; 1 ; 8 ; 27 ; 64 ; 125 …

a) Déterminer u_0 , u_1 et u_2 .

b) Avec quel indice note-t-on le cinquième terme de la suite u ?

c) Déterminer le terme de rang 6.

d) Conjecturer le terme général de la suite u en fonction de n .

e) La suite u peut aussi se noter u_n : vrai ou faux ?

f) La suite u est-elle une fonction ? Si, oui, donner son ensemble de définition.

Ex 7-2 : QCM : restituer les notions du cours

On considère une suite u définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme d'indice 0.
Dans chaque cas, indiquer la ou les bonnes réponses.

1) Quel est le $5^{ème}$ terme de la suite ?

a) u_4 b) u_5 c) u_7 d) 4

2) Quel est le rang du $10^{ème}$ terme ?

a) u_{10} b) u_9 c) 9 d) 10 e) 11

3) Quel est le terme de rang 7 ?

a) u_6 b) u_7 c) 6 d) 8

4) Les égalités suivantes sont-elles valides ?

a) $u_3=2{,}7$ b) $u_{-5}=4$ c) $u_{2,4}=8$ d) $u_5=-50$

Ex 7-3 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Indiquer si la situation peut-être traduite par une suite définie sur une partie de $\mathbb{N}$.

1) À chaque saut du perchiste, on associe la performance.

2) À chaque intensité du courant, on associe la tension relevée aux bornes du générateur.

3) À chaque instant de la journée, on associe la température extérieure.

4) À chaque heure de la journée, on associe le nombre d'automobiles passées sur l'avenue des Champs-Élysées.

5) À chaque mois, on associe la durée des communications téléphoniques.

Ex 7-4 : Combien de termes

Combien dénombre-t-on de termes :

a) de u_1 à u_{37} :

b) de u_0 à u_{18} :

c) de u_{17} à u_{85} :

Suite définie par une formule explicite

Ex 7-5 : Calculs des premiers termes

Dans chaque cas, déterminer les valeurs des quatre premiers termes de la suite (u_n) :

a) $u_n=n^2-4$

b) $u_n=\dfrac{1}{n+1}$

c) $u_n=(-1)^n$

d) $u_n=n^2-5n+4$

Ex 7-6 : Trouver une formule explicite

Déterminer une formule explicite de la suite telle que :

1) Chaque terme est égal à la moitié de son rang.

2) Chaque terme est égal au cube de son rang.

3) $u_n = f(n)$ où $f(x) = \sqrt{2x+7}$

4) $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{8}$, $u_3 = \frac{1}{16}$ ...

5) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1$ ...

6) $u_0 = 5$, $u_1 = -\frac{1}{5}$, $u_2 = 5$, $u_3 = -\frac{1}{5}$ ...

Ex 7-7 : Un peu de logique

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel, par $u_n = n^3 - 6n^2 + 5n + 4$

1) Déterminer u_0 et u_1 .

2) La proposition P : « $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4$ » est-elle vraie ?

3) Écrire la négation de la proposition P.

4) Combien de termes u_n sont-ils égaux à 4 ? Justifier.

Ex 7-8 : Ensemble de définition

Indiquer, **en justifiant**, si la proposition est **vraie** ou **fausse**.
« La suite de terme général u_n est définie pour tout entier naturel n »

1) $u_n = \frac{5}{3^n - 1}$

2) $u_n = \frac{3}{3n-2}$

3) $u_n = \sqrt{-n^2 + 9n - 8}$

4) $u_n = \sqrt{3 - 3(-1)^n}$

Suite définie par une formule de récurrence

Ex 7-9 : Déterminer u_n en fonction de u_{n-1}

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n{}^2 - 3u_n + 2$.

1) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} .

3) Faire de même avec la suite (v_n) définie par $v_0=1$ et $v_{n+1}=\frac{2}{v_n+5}$.

<u>Ex 7-10 :</u> Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n

Dans chaque cas, déterminer une formule de récurrence de la suite.
1) Chaque terme est égal au triple du terme précédent.

2) La somme de deux termes consécutifs est toujours égale à 5.

3) Chaque terme est une augmentation de 20 % du terme précédent.

4) $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\frac{3x+5}{4x+1}$

5) $u_n=7^{n-3}$

6) $u_n=2n-5$

7) $u_n=1\times2\times3\times\ldots\times n$

8) $u_n=\frac{1}{n+1}$

9) $u_0=8$, $u_1=10$, $u_2=13$, $u_3=17$, $u_4=22$ …

10) $u_0=1$, $u_1=5$, $u_2=21$, $u_3=85$ ...

<u>Ex 7-11 :</u> Calculs des premiers termes

Dans chaque cas, calculer les trois premiers termes de la suite.
1) $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=3u_n-2n+2$

2) $u_1=4$ et, pour tout entier naturel $n\geqslant2$, $u_n=2u_{n-1}+n$

3) $u_0=1$, $u_1=-1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2}=2u_{n+1}-3u_n+2$

<u>Ex 7-12 :</u> Ensemble de définition

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=-5$, et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$.
1) Déterminer la fonction f telle que, pour tout entier naturel, $u_{n+1}=f(u_n)$. Quel est l'ensemble de définition de f ?

2) Soit $\mathrm{I}=[-5;3]$. Montrer que si $x\in\mathrm{I}$, alors $f(x)\in\mathrm{I}$.

3) Vérifier que $u_0\in\mathrm{I}$ et démontrer que, si $u_n\in\mathrm{I}$, alors $u_{n+1}\in\mathrm{I}$.
En déduire que la suite (u_n) est bien définie sur $\mathbb{N}$.

4) Indiquer si les suites ci-dessous sont bien définies sur $\mathbb{N}$.

a) v_0 = 10 , et pour tout entier naturel n , $v_{n+1}=\dfrac{1}{v_n+5}$

b) $w_0=7{,}5$, et pour tout entier naturel n , $w_{n+1}=\sqrt{2w_n-6}$

Algorithme, calculatrice, tableur

Ex 7-13 : Avec des listes python

Algorithme a

```
Lire n
Pour i allant de 0 à n
  u[i] ← 2*i*i-3*i+1
  Afficher u[i]
FinPour
```

Traduction en python

```
n=int(input("n="))
u=[ ]
for i in range(0,n+1):
    u.append(2*i**2-3*i+1)
    print (u[i])
```

Algorithme b

```
Lire n
Lire u[0]
Pour i allant de 1 à n
  u[i] ← 2*u[i-1]*u[i-1]-3*u[i-1]+1
  Afficher u[i]
FinPour
```

Traduction en python

```
n=int(input("n="))
u0=float(input("u0="))
u=[ ]
u.append(u0)
for i in range(1,n+1):
    u.append(2*u[i-1]**2-3*u[i-1]+1)
    print (u[i])
```

Déterminer le rôle de ces deux algorithmes.

Ex 7-14 : Calculatrice

À l'aide de la calculatrice, déterminer les dix premiers termes de :

1) La suite u définie pour tout entier naturel n , par $u_n=\sqrt{n^2+\dfrac{1}{2}n}$.

2) La suite v définie pour tout entier naturel n , par
$$\begin{cases} v_0=3 \\ v_{n+1}=\sqrt{v_n^{\,2}+\dfrac{1}{2}v_n} \end{cases}$$

Ex 7-15 : Tableur

Dans chacun des cas ci-dessous, une suite a été définie sur un tableur : indiquer laquelle.

1)

B3 =RACINE(A3^2+3)

	A	B	C	D	E
1	n	u(n)			
2	0	1,73205081			
3	1	2			
4	2	2,64575131			
5	3	3,46410162			

2)

B5 =RACINE(B4^2+3)

	A	B	C	D	E
1	n	u(n)			
2	0	1			
3	1	2			
4	2	2,64575131			
5	3	3,16227766			

Comportement d'une suite

Ex 7-16 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Soit (u_n) une suite telle que pour tout entier nature n , $0<u_n<5$.

1) (u_n) est minorée par 4.

2) (u_n) est minorée par 0.

3) (u_n) est minorée par 1.

4) 6 est un majorant de (u_n) .

5) (u_n) est bornée.

6) (u_n) est nécessairement croissante.

7) (u_n) peut admettre une limite infinie.

8) (u_n) admet nécessairement une limite finie.

9) (u_n) admet une infinité de majorants et de minorants.

Ex 7-17 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.

2) Si (u_n) est de signe constant, alors (u_n) est monotone.

3) Une suite croissante est toujours majorée.

4) Une suite peut être à la fois croissante et majorée.

5) Une suite décroissante est toujours majorée.

6) Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

a) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.

7) Une suite décroissante peut avoir une limite égale à 100.

8) On peut déterminer le signe de la dérivée d'une suite (u_n) pour déterminer les variations de (u_n).

Ex 7-18 : Conjecturer avec un tableur ou une calculatrice

Dans chaque cas, utiliser un tableur ou une calculatrice pour conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles)

1) $u_n = 2\sqrt{n+4}$

Déterminer aussi le premier indice n tel que $u_n > 100$

2) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 4} \end{cases}$

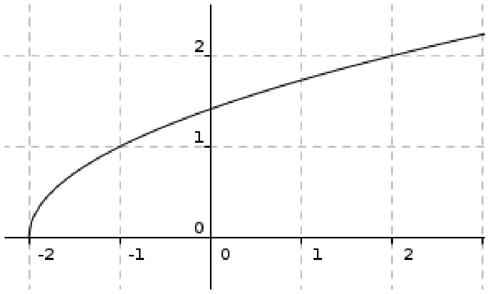
3) $v_n = \dfrac{10n}{n+1}$

4) $\begin{cases} v_0 = 7 \\ v_{n+1} = \dfrac{10 v_n}{v_n + 1} \end{cases}$

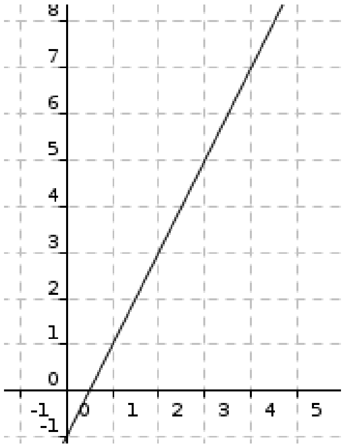
Ex 7-19 : Représenter graphiquement une suite définie par récurrence

Dans chaque cas, on considère la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. À l'aide de la droite $d : y = x$, représenter les premiers termes de la suite sur les axes, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).

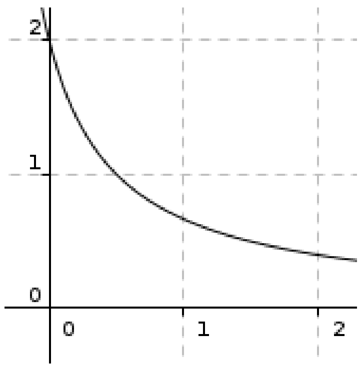
1) $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$



2) $u_0 = 1,5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$



3) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 0,5}$



Ex 7-20 : Conjecturer

Dans chaque cas, utiliser la méthode votre choix pour conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles)

1) $u_n = \dfrac{n^2 - 2n - 5}{n+3}$

2) $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{10}{u_n+2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+3}{4u_n} \end{cases}$

Ex 7-21 : Étudier la monotonie

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+n^2-3n+5$

2) $u_n=n\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3) $u_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$

4) $u_0=5$ et $u_{n+1}=u_n-2n$

5) $u_n=1\times2\times3\times\ldots\times n$

6) $u_n=\dfrac{n^2}{3^n}$

7) $u_n=n^3-12n^2+45n$ (Aide : étudier une fonction)

8) $u_n=\dfrac{n^2-4}{n^2+1}$ (Aide : étudier une fonction)

9) (u_n) est la suite des aires d'un rectangle dont les côtés mesurent n et $3,5-n$.

10) (u_n) est la suite des coefficients directeurs des droites d_n d'équation $3x-ny+5n=0$

Ex 7-22 : Suites bornées

Dans chacun des cas, indiquer si la suite est minorée, majorée ou bornée.

1) $u_n=4\left(\frac{2}{3}\right)^n-1$

2) $u_n=\frac{(-1)^n}{5}+4$

3) $u_n=\frac{n^2}{n^2+2}$

4) $u_n=3-4\sin(5n)$

5) $u_n=\frac{3^n}{4}-1$

6) $u_n=1-\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}$ (pour $n>1$)

7) $u_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(3-\frac{4}{n}\right)$ (pour $n>1$)

8) $u_n=\dfrac{3+\sin n}{2-\sin n}$

<u>Ex 7-23 :</u> Une peu de logique

Soit P la proposition : « la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n, est minorée par 5 »
Laquelle des propositions suivantes est la négation de P ?

Q_1 : « (u_n) est minorée par 4 »

Q_2 : « $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n<5$ »

Q_3 : « (u_n) est majorée par 5 »

Q_4 : « $\exists n\in\mathbb{N}$, tel que $u_n<5$ »

<u>Ex 7-24 :</u> Utilisation d'une autre suite

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1=8$ dont on donne les premiers termes : 8 , 10 , 13 , 17 , 22 , 28 … et dont la formule de récurrence est l'une des quatre suivantes :
$u_{n+1}=u_n+2n-1$, $u_{n+1}=u_n+3n-1$, $u_{n+1}=u_n^{\ 2}-7u_n+8$,
$u_{n+1}=u_n+n+1$

1) a) Sélectionner la bonne formule de récurrence que l'on notera (R).

b) Montrer que la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, par $v_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$, vérifie la relation (R) mais que la suite (v_n) n'est pas la suite (u_n) .

2) Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $w_n=u_n-v_n$.
a) Démontrer que la suite (w_n) est constante.

b) En déduire une expression de u_n en fonction de n .

c) Démontrer que (u_n) est croissante.

d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n\geqslant 1000$.

Ex 7-25 : Représentation graphique et limite

Donner un exemple de représentation possible d'une suite :

1) Croissante qui a pour limite 5.

2) Croissante qui a pour limite $+\infty$.

3) Décroissante qui a pour limite 5.

4) Décroissante qui a pour limite $-\infty$.

5) Non monotone qui a pour limite 5.

6) Non monotone qui n'a pas de limite.

Ex 7-26 : Algorithme – Python : variations d'une suite

python

Algorithme a

```
Fonction f(x)
  retourner -x^4+2*x³-x+5

Lire n
u[0]=f(0)
Pour i allant de 0 à n-1
  u[i+1] ← f(i+1)
  Si (u[i]>u[i+1]) alors
    afficher ("non")
  Sinon
    afficher ("oui")
  finSi
FinPour
```

Traduction en python

```python
def f(x):
  return -x**4+2*x**3-x+5

n=int(input("n="))
u=[]
u.append(f(0))
for i in range(0,n):
    u.append(f(i+1))
    if (u[i]>u[i+1]):
        print("non")
    else:
        print("oui")
```

Algorithme b

```
Fonction f(x)
  retourner -x^4+2*x³-x+5

Lire n
Lire p
u[0]← p
Pour i allant de 0 à n-1
  u[i+1] ← f(u[i+1])
  Si (u[i]>u[i+1]) alors
    afficher ("non")
  Sinon
    afficher ("oui")
  finSi
FinPour
```

Traduction en python

```python
def f(x):
  return -x**4+2*x**3-x+5

n=int(input("n="))
u0=float(input("u0="))
u=[]
u.append(u0)
for i in range(0,n):
    u.append(f(u[i]))
    if (u[i]>u[i+1]):
        print("non")
    else:
        print("oui")
```

1) a) Quel est le rôle de chacun des algorithmes a et b ?
Préciser la signification des messages « oui » et « non ».

b) Que doit afficher l'algorithme pour que la suite soit croissante jusqu'au rang n ?

2) Tester l'un des deux algorithmes pour répondre aux questions suivantes :

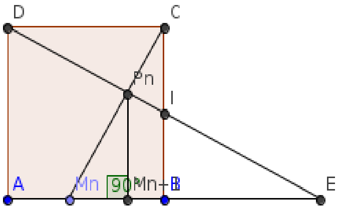
a) Que peut-on dire de la suite de terme général $u_n=-n^4+2n^3-n+5$ jusqu'au rang :10 ? 20 ? 30 ?

b) Que peut-on dire de la suite définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$ jusqu'au rang 8 ? 16 ? 32 ? (On admet que $u_n\in[0;1[$)

c) Que peut-on dire de la suite de terme général $u_n=\frac{n^8}{2^n}$; jusqu'au rang 8? 12? 16 ?

Ex 7-27 : ***Une conjecture avec GeoGebra***

ABCD est un carré de côté 1 et I est le milieu de [BC].
On considère une suite de points M_n définie de la manière suivante :
$\mathrm{M}_0=\mathrm{A}$ et pour tout entier naturel n , M_{n+1} est le projeté orthogonal sur $[\mathrm{AB}]$ du point d'intersection P_n des droites (CM_n) et (DI) .



1) À l'aide de Geogebra, faire une figure et visualiser la positions des points M_0 , M_1 et M_2 .

2) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n=\mathrm{AM}_n$.
a) En déplaçant le point M_n ; conjecturer géométriquement la limite de (u_n) .

b) Démontrer que $u_0=0$ et que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\frac{2}{3-u_n}$

c) À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, vérifier (sans démontrer) la conjecture effectuée en 2) a).

Ex 7-28 : Une conjecture avec un tableur

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=\frac{-u_n-4}{u_n+3} \end{cases}$.

1) a) À l'aide d'un tableur, donner les 40 premiers termes de la suite.

b) Représenter graphiquement le nuage de points $(n\,;u_n)$.

c) En observant le nuage de points, quelles conjectures peut-on faire sur le comportement de cette suite ?

2) a) Compléter le tableau de valeurs en faisant figurer le calcul de $v_n=\frac{3}{u_n+2}$. Que remarque-t-on ?

b) Conjecturer une expression explicite de u_n en fonction de n .

3) Vérifier qu'avec la formule conjecturée en 2) b) :

a) on a bien $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=\frac{-u_n-4}{u_n+3} \end{cases}$

b) on peut justifier le sens de variation de (u_n) conjecturé dans 1) c)

c) on voit plus facilement la limite de (u_n) conjecturée dans 1) c)

Ex 7-29 : Algortithme – Python : Valeurs approchées de $\sqrt{x}$

On va comparer deux méthodes d'obtention de valeurs approchées de $\sqrt{17}$, puis de manière plus générale de $\sqrt{x}$ où x est un entier naturel.

Question A) Méthode de dichotomie

On construit une suite croissante (a_n) et une suite décroissante (b_n) telles que, pour tout entier naturel n , $a_n<\sqrt{17}<b_n$, en partageant, après chaque étape n , l'intervalle contenant $\sqrt{17}$ en deux intervalles de même amplitude, et en choisissant celui qui contient $\sqrt{17}$.

Étape 0 : On sait que $4<\sqrt{17}<5$, donc on prend $a_0=4$ et $b_0=5$.

Étape 1 : On partage l'intervalle [4;5] en deux intervalles [4;4,5] et [4,5;5]. Comme $4{,}5^2>17$, on choisit l'intervalle $[4;4{,}5]$ qui contient $\sqrt{17}$.
Ainsi on prend $a_1=4$ et $b_1=4{,}5$.
On réitère un certain nombre n de fois l'opération jusqu'à obtenir une précision p telle que $b_n-a_n\leq p$.

a) Déterminer les premiers termes des suites (a_n) et (b_n) jusqu'au rang 3.

b) Compléter l'algorithme ci-dessous

Algorithme a

```
afficher ("Valeur approchée de racine de ")
Lire x
lire a[0]
lire b[0]
n ← ............
lire p
Tant que (b[n]-a[n] ............ ) faire
  m ← (a[n]+b[n])/2
  Si (m*m< ............ ) alors
    a[n+1] ← ............
    b[n+1] ← ............
  FinSi
  Sinon
    a[n+1] ← ............
    b[n+1] ← ............
  FinSinon
  n ←n+1
Fin Tant que
afficher ("a[",n,"]=",a[n])
afficher ("b[",n,"]=",b[n])
```

Traduction en python

```
x=float(input("Valeur approchée de racine de="))
a0=float(input("a0="))
b0=float(input("b0="))
p=float(input("p="))
n=0
a=[]
b=[]
a.append(a0)
b.append(b0)
while (b[n]-a[n]>p):
    m=(a[n]+b[n])/2
    if (m**2<x):
        a.append(m)
        b.append(b[n])
    else:
        a.append(a[n])
        b.append(m)
    n=n+1

print("a[",n,"]=",a[n])
print("b[",n,"]=",b[n])
```

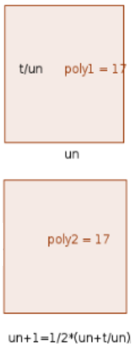
c) Utiliser le programme pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, et $\sqrt{23}$ avec une précision de 10^{-5} puis de 10^{-8} .

Question B) <u>Méthode de Héron</u>

On considère un rectangle d'aire 17 et dont les côtés mesurent u_0 et $\frac{17}{u_0}$.

On prend ici pour u_0 la partie entière de $\sqrt{17}$. Pour rendre ce rectangle « un peu plus carré », on construit le rectangle de même aire ayant pour longueur d'un côté u_1 , égale à la moyenne des deux mesures du rectangle précédent : $u_1=\frac{1}{2}\left(u_0+\frac{17}{u_0}\right)$

En réitérant indéfiniment l'opération, on construit la suite (u_n) de longueurs de rectangles définie par $u_0=4$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{17}{u_n}\right)$ qui va tendre vers $\sqrt{17}$ c'est à dire vers la longueur du côté du carré d'aire 17.



1) Compléter l'algorithme ci-dessous qui donne une valeur approchée de $\sqrt{x}$ avec une précision p telle que $|u_n-\sqrt{x}|\leq p$.

Algorithme b

afficher ("Valeur approchée de racine de ")
Lire x
u[0] ← …………
n ← …………
lire p
Tant que (………… …………) faire
   u[n+1] ← …………
   n ← …………
afficher ("u[",n,"]=",u[n])

Traduction en python

```
from math import sqrt,floor
x=float(input("Valeur approchée de racine de="))
p=float(input("p="))
u0=float(input("u0="))
n=0
u=[]
u.append(floor(sqrt(x)))
while (abs(u[n]-sqrt(x))>p):
    u.append(0.5*(u[n]+x/u[n]))
    n=n+1

print("u[",n,"]=",u[n])
```

c) Utiliser le programme pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{17}$, $\sqrt{13}$, et $\sqrt{23}$ avec une précision de 10^{-5} puis de 10^{-8} .

d) Quelle critique peut-on faire au sujet de cet algorithme ?
(Une histoire de poule et d'oeuf !)

Question C) Quelle est la méthode la plus performante ?

<u>Ex 7-30 :</u> Algorithme – Python : Factorielle n ($n!$)

On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_1=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_{n+1}=(n+1)w_n$$

On admet que, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_n>0$

Écrire en Python une fonction de paramètre n qui renvoie la valeur de w_n .