Chapitre 9 - VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

1) DÉFINITION

Définition :

Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- L'événement de Ω, noté $\{X = x\}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- $X(\Omega)$, l'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X. Cet ensemble est noté Ω '.

Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.

En général, une variable aléatoire est notée X, Y , Z …

Exemple : ***Pour tout le chapitre***

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.
L'univers de cette expérience aléatoire est : $\Omega =$

On peut, par exemple, définir une variable aléatoire X de la façon suivante :
- $X = 0$ si le nombre est pair
- $X = 1$ si le nombre est impair

L'ensemble image de Ω par X est $X(\Omega) = \Omega' =$

On a $\{X=0\}=$ et $\{X=1\}=$

Remarque : On note $\{X \geqslant a\}$, l'événement « la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à a », c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω qui ont une image supérieure ou égale à a par X . On définit de même $\{X \leqslant a\}$, $\{X > a\}$ et $\{X < a\}$.

2) LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE (on dit aussi loi image de la variable aléatoire)

Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.

$\Omega' = \{x_1 , x_2 , \dots , x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω ', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p_i' = P(X = x_i)$

On démontre facilement que

$$\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i) = 1$$

Exemple :

La loi de probabilité de la variable aléatoire définie ci-dessus est :

x_i		
$p_i' = P(X = x_i)$		

3) ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART TYPE

Si les issues d'une expérience aléatoire sont des nombres réels, on peut définir les nombres ci-dessous :

Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité . On note p_i la probabilité de l'éventualité ω_i.

- **L'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre μ défini par : $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \omega_i$
- **La variance** de la loi de probabilité est le nombre V défini par : $V = \sum_{i=1}^{n} p_i (\omega_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \omega_i^2 - \mu^2$
- **L'écart type** de la loi de probabilité est le nombre σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

Preuve : *formule de la variance*

Définition :

L'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire X sont respectivement l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la loi de probabilité de X définie sur Ω '.

Les notations respectives sont $\mathrm{E}(\mathrm{X})$, $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ et $\sigma(\mathrm{X})$.

Exemple :

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) =$ $\mathrm{V}(\mathrm{X}) =$ et $\sigma(\mathrm{X}) =$

Remarques :

- On peut interpréter l'espérance comme étant la valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions ou encore comme étant la valeur que l'on peut espérer obtenir.

- Si la variable aléatoire X désigne le gain d'un jeu, on dit que ce jeu est équitable lorsque E(X)=0.

- Comme en statistique descriptive, l'écart type mesure la dispersion . Plus l'écart type est faible, plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance.

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{E}(a\,\mathrm{X}+b) = a\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b \qquad \mathrm{V}(a\,\mathrm{X}+b) = a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

Preuve :

Soit $\Omega = \{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.
$\Omega ' = \{x_1 , x_2 , \dots , x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

On a alors $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} p_i '\, x_i$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{m} p_i '\, x_i^2 - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2$

- $$\mathrm{E}(a\,\mathrm{X}+b) = \sum_{i=1}^{m} p_i '(a\,x_i+b) = \sum_{i=1}^{m} (a\,p_i '\,x_i + b\,p_i ') = \sum_{i=1}^{m} a\,p_i '\,x_i + \sum_{i=1}^{m} b\,p_i ' = a\sum_{i=1}^{m} p_i '\,x_i + b\sum_{i=1}^{m} p_i '$$

  Or $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} p_i '\,x_i$ et $\sum_{i=1}^{m} p_i ' = 1$. On en déduit que $\mathrm{E}(a\,\mathrm{X}+b) = a\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b$

- $$\begin{aligned} \mathrm{V}(a\,\mathrm{X}+b) &= \sum_{i=1}^{m} p_i '(ax_i+b)^2 - \mathrm{E}(a\,\mathrm{X}+b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} p_i '\times(a^2\,x_i^2+2\,abx_i+b^2) - (a\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} (p_i '\,a^2\,x_i^2 + p_i '\,2\,abx_i + p_i '\,b^2) - (a^2\,\mathrm{E}(\mathrm{X})^2 + 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b^2) \\ &= a^2\sum_{i=1}^{m} p_i '\,x_i^2 + 2\,ab\sum_{i=1}^{m} p_i '\,x_i + b^2\sum_{i=1}^{m} p_i ' - a^2\,E(\mathrm{X})^2 - 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) - b^2 \end{aligned}$$

Or $2\,ab\sum_{i=1}^{m} p_i '\,x_i = 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $b^2\sum_{i=1}^{m} p_i ' = b^2\times 1 = b^2$ Ainsi $\mathrm{V}(a\,\mathrm{X}+b) = a^2\left(\sum_{i=1}^{m} p_i '\,x_i^2 - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2\right) + 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b^2 - 2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X}) - b^2 = a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$

Remarque :

Dans toutes les situations étudiées jusqu'à présent, la variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs . On dit que X est **discrète**.