VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

1) DÉFINITION

Définition :

Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- L'événement de Ω, noté $\{X = x\}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- $X(\Omega)$, l'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X. Cet ensemble est noté Ω'.

Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.

En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z …

Exemple : *Pour tout le chapitre*

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.
L'univers de cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

On peut, par exemple, définir une variable aléatoire X de la façon suivante :
- $X = 0$ si le nombre est pair
- $X = 1$ si le nombre est impair

L'ensemble image de Ω par X est $X(\Omega) = \Omega' = \{0\,;1\}$

On a $\{X=0\} = \{2;4;6\}$ et $\{X=1\} = \{1;3;5\}$

Remarque : On note $\{X \geqslant a\}$, l'événement « la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à a », c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω qui ont une image supérieure ou égale à a par X. On définit de même $\{X \leqslant a\}$, $\{X > a\}$ et $\{X < a\}$.

2) LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE (on dit aussi loi image de la variable aléatoire)

Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.

$\Omega' = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p_i' = P(X = x_i)$

On démontre facilement que

$$\sum_{i=1}^{m} P(X = x_i) = 1$$

Exemple :

La loi de probabilité de la variable aléatoire définie ci-dessus est :

x_i	0	1
$p_i' = P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3) ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART TYPE

Si les issues d'une expérience aléatoire sont des nombres réels, on peut définir les nombres ci-dessous :

Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité. On note p_i la probabilité de l'éventualité ω_i.

- **L'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre μ défini par : $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \omega_i$
- **La variance** de la loi de probabilité est le nombre V défini par : $V = \sum_{i=1}^{n} p_i (\omega_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \omega_i^2 - \mu^2$
- **L'écart type** de la loi de probabilité est le nombre σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

Preuve : *formule de la variance*

$$\mathrm{V}=\sum_{i=1}^{n} p_i(\omega_i-\mu)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(p_i\omega_i^2-2p_i\omega_i\mu+p_i\mu^2\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i^{\,2}-2\mu\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i+\mu^2\sum_{i=1}^{n} p_i$$

Or $\mu=\sum_{i=1}^{n} p_i\,\omega_i$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$

On en déduit que $\mathrm{V}=\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i^{\,2}-2\mu^2+\mu^2=\sum_{i=1}^{n} p_i\omega_i^{\,2}-\mu^2$

Définition :

L'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire X sont respectivement l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la loi de probabilité de X définie sur $\Omega\,'$.

Les notations respectives sont $\mathrm{E}(\mathrm{X})$, $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ et $\sigma(\mathrm{X})$.

Exemple :

$\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$ $\qquad \mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{1}{2}\times 0^2+\frac{1}{2}\times 1^2-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ $\qquad$ et $\quad \sigma(\mathrm{X})=\frac{1}{2}$

Remarques :

- On peut interpréter l'espérance comme étant la valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions ou encore comme étant la valeur que l'on peut espérer obtenir.

- Si la variable aléatoire X désigne le gain d'un jeu, on dit que ce jeu est équitable lorsque E(X)=0.

- Comme en statistique descriptive, l'écart type mesure la dispersion . Plus l'écart type est faible, plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance.

Propriété :

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{E}(a\,\mathrm{X}+b)=a\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b \qquad\qquad \mathrm{V}(a\,\mathrm{X}+b)=a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$$

Preuve :
Soit $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.
$\Omega\,'=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

On a alors $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{m} p_i\,'\,x_i$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{m} p_i\,'\,x_i^2-\mathrm{E}(\mathrm{X})^2$

- $\mathrm{E}(a\,\mathrm{X}+b)=\sum_{i=1}^{m} p_i\,'(a\,x_i+b)=\sum_{i=1}^{m}(a\,p_i\,'\,x_i+b\,p_i\,')=\sum_{i=1}^{m} a\,p_i\,'\,x_i+\sum_{i=1}^{m} b\,p_i\,'=a\sum_{i=1}^{m} p_i\,'\,x_i+b\sum_{i=1}^{m} p_i\,'$

  Or $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{n} p_i\,'\,x_i$ et $\sum_{i=1}^{m} p_i\,'=1$. On en déduit que $\mathrm{E}(a\,\mathrm{X}+b)=a\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b$

- $$\begin{aligned}\mathrm{V}(a\,\mathrm{X}+b)&=\sum_{i=1}^{m} p_i\,'(ax_i+b)^2-\mathrm{E}(a\,\mathrm{X}+b)^2\\ &=\sum_{i=1}^{m} p_i\,'\times\left(a^2x_i^{\,2}+2\,abx_i+b^2\right)-(a\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b)^2\\ &=\sum_{i=1}^{m}\left(p_i\,'a^2x_i^{\,2}+p_i\,'\,2\,abx_i+p_i\,'\,b^2\right)-\left(a^2\,\mathrm{E}(\mathrm{X})^2+2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b^2\right)\\ &=a^2\sum_{i=1}^{m} p_i\,'x_i^{\,2}+2\,ab\sum_{i=1}^{m} p_i\,'x_i+b^2\sum_{i=1}^{m} p_i\,'-a^2\,E(\mathrm{X})^2-2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X})-b^2\end{aligned}$$

Or $2\,ab\sum_{i=1}^{m} p_i\,'\,x_i=2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $b^2\sum_{i=1}^{m} p_i\,'=b^2\times 1=b^2$ Ainsi $\mathrm{V}(a\,\mathrm{X}+b)=a^2\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\,'\,x_i^{\,2}-\mathrm{E}(\mathrm{X})^2\right)+2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X})+b^2-2\,ab\,\mathrm{E}(\mathrm{X})-b^2=a^2\,\mathrm{V}(\mathrm{X})$

Remarque :

Dans toutes les situations étudiées jusqu'à présent, la variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs . On dit que X est **discrète**.