

**Restituer les notions du cours**

**Ex 9-1 : Vrai ou faux**

On considère une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  et on note X et Y deux variables aléatoires définies sur  $\Omega$ .

- 1) Une variable aléatoire est une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .
- 2) Une variable aléatoire ne prend que des valeurs entières.
- 3) Une variable aléatoire ne prend que des valeurs comprises entre 0 et 1.
- 4) Les ensembles  $\Omega$  et  $X(\Omega)$  ont le même nombre d'éléments.
- 5) Si  $x_1$  et  $x_2$  sont deux valeurs distinctes prises par une variable aléatoire X, alors les événements  $\{X=x_1\}$  et  $\{X=x_2\}$  sont incompatibles.
- 6) La loi de probabilité de X est une fonction définie sur  $\Omega$ .
- 7) Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

$x_i$	-0,15	0,2	0,3	14
$P(X = x_i)$	0,2	0,4	0,1	0,3

8) Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

$x_i$	0,005	0,2	3,7	14
$P(X = x_i)$	0,2	0,4	0,15	0,3

- 9) On peut définir sur  $\Omega$  une infinité de variables aléatoires.
- 10) Les ensembles  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  ont le même nombre d'éléments.
- 11) Si on appelle  $x_i$  les  $n$  valeurs prises par X et  $y_j$  les  $m$  valeurs prises par Y, alors  $\sum_{i=1}^n X = x_i = \sum_{j=1}^m Y = y_j$
- 12)  $P(X > 3) = P(X \geq 4)$
- 13)  $P(X \leq 3) \leq P(X \leq 6)$
- 14)  $P(X = -2) = 1 - P(X = 2)$
- 15)  $P(3 \leq X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$

**Déterminer la loi d'une variable aléatoire**

**Ex 9-2 : Définir plusieurs variables aléatoires à partir d'une expérience**

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie. Déterminer, à partir de cette expérience aléatoire, deux variables aléatoires ainsi que les ensembles des valeurs prises par ces variables aléatoires.

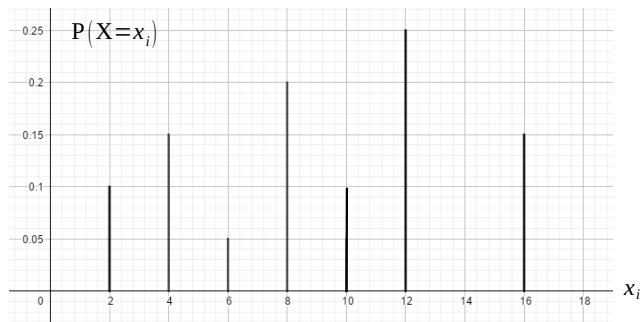
**Ex 9-3 : Déterminer la loi d'un variable aléatoire**

On choisit aléatoirement un entier compris entre 1 et 20 :  
 - s'il est premier on gagne 3 euros.  
 - si c'est un multiple de 4, on gagne un euro.  
 - sinon, on perd deux euros.

Déterminer la loi de probabilité de X.

**Ex 9-4 : Variable aléatoire à partir d'un graphique**

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, définie par la représentation graphique ci-dessous.



2 ) Calculer  $P(X \geq 8)$  et  $P(\overline{X} \geq 8)$

3 ) Reprendre les questions dans le cas de tirages sans remise.

**Ex 9-5 : Représenter graphiquement une variable aléatoire**

Une urne contient deux boules blanches et une boule rouge.  
On tire deux boules de l'urne successivement et avec remise . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1 ) Déterminer la loi de probabilité de X.

2 ) Représenter graphiquement X.

**Ex 9-6 : Représenter graphiquement une variable aléatoire**

On lance deux dés tétraédriques numérotés de 1 à 4.  
On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des résultats des deux dés.

1 ) Déterminer la loi de probabilité de X.



2 ) Représenter graphiquement X.

3 ) Calculer  $P(X \geq 4)$  et  $P(3 < X \leq 6)$

#### Ex 9-7 : Déterminer la loi d'une variable aléatoire

Un élève peu sérieux répond de façon aléatoire « vrai ou faux » à un questionnaire comportant trois questions.  
Chaque réponse juste rapporte deux points et chaque réponse fautive fait perdre un point .  
Le total des points de l'exercice est ramené à 0 s'il est négatif.  
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par l'élève peu sérieux.

Déterminer la loi de probabilité de X .

#### Ex 9-8 : Simuler une variable aléatoire

Une variable aléatoire X admet la loi de probabilité suivante :

$x_i$	-2,1	-0,8	3,4	5,7	8
$P(X = x_i)$	0,24	0,17	0,35	0,09	0,15

1 ) Compléter la fonction Simu\_X() écrite en Python ci-dessous afin qu'elle simule la variable aléatoire X.

```

1 from random import random
2
3 def Simu_X():
4     alea=.....
5     if alea<.....:
6         return(.....)
7     if alea<.....:
8         return(.....)
9     if alea<0.76:
10        return(3.4)
11    if alea<0.85:
12        return(5.7)
13    return(.....)

```



2 ) Calculer  $P(X < 0)$

3 ) a ) Écrire un programme simulant 1000 fois cette expérience et calculant la fréquence de simulations donnant un résultat négatif.

b ) Tester ce programme.

c ) Que penser du résultat obtenu ?

Espérance, variance et écart type**Ex 9-9 : Estimer par simulation l'espérance et l'écart type**

On reprend les données de l'exercice 8.

$x_i$	-2,1	-0,8	3,4	5,7	8
$P(X = x_i)$	0,24	0,17	0,35	0,09	0,15

1) Compléter le programme ci-dessous écrit en Python utilisant la fonction `Simu_X()` de l'exercice 8, afin qu'il donne une estimation de la moyenne et de l'écart type en simulant 1000 fois l'expérience.

```

14 from math import sqrt
15
16 moy=.....
17 for i in range(1000):
18     moy=.....
19 moy=.....
20 print(moy)
21
22 s=0
23 for i in range(1000):
24     s=.....
25 s=sqrt(s/1000)
26 print(s)

```

2) a) L'espérance de X notée  $\mu$  vaut environ 2,26 (à 0,01 près) et son écart type noté  $\sigma$  vaut environ 3,55 (à 0,01 près).

Compléter le programme écrit en Python ci-dessous afin de simuler 200 échantillons de 400 simulations de X.

```

14 from math import sqrt
15
16 def echant(n):
17     m=.....
18     for i in range(n):
19         m=m+simu_X()
20     return m/n
21
22 L=[]
23 for j in range(200):
24     L.append(.....)
25 mu=2.26
26 si=3.55
27 c=.....
28
29 for valeur in L:
30     if abs(valeur-mu)<.....:
31         c=c+1
32 print(.....)

```

b) Estimer avec ce programme la proportion d'échantillons donc la

moyenne  $m$  vérifie :  $|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{400}}$

**Ex 9-10 : Définir une variable aléatoire d'espérance donnée**

1) a) Définir une variable aléatoire X prenant les valeurs 0, 2 et 5 dont l'espérance est 2.

b) Peut-on définir une variable aléatoire X prenant les valeurs 0, 2 et 5 dont l'espérance est 0 ?

2) Définir deux variables aléatoires X et Y prenant les valeurs -3, 0, 1 et 2 dont l'espérance est nulle. X et Y ont-elles même variance ?

**Ex 9-11 :  $E(aX+b)$  et  $\sigma(aX+b)$** 

Soit X une variable aléatoire telle que  $E(X)=4$  et  $\sigma(X)=0,124$

1) Calculer  $E(-4X)$  et  $\sigma(-4X)$

2) Calculer  $E(X+5)$  et  $\sigma(X+5)$

3) Calculer  $E(-4X+5)$  et  $\sigma(-4X+5)$

4) On augmente toutes les valeurs de  $X$  de 20 %, que peut-on dire de la nouvelle espérance de  $X$  et de son nouvel écart type ?

**Ex 9-12 : Jeu favorable ou pas, jeu équitable -  $V(aX+b)$**

La roue d'une loterie comporte 10 secteurs identiques dont 4 rapportent 1 euro, 5 rapportent 3 euros et 1 rapporte 10 euros.  
Le joueur doit miser 3 euros avant de lancer la roue.

1) Le jeu est-il favorable au joueur ?  
(On note  $X$  la variable aléatoire utilisée)

2) Déterminer le montant de la mise pour que le jeu soit équitable.  
(On note  $Y$  la variable aléatoire utilisée)

3) Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ .

4) Avec cette nouvelle mise, les gains du jeu sont-ils plus dispersés qu'avant ou non ?

**Exercice 13 : Jeux équitables -  $V(aX+b)$**

On joue à « pile ou face » et on considère deux règles de jeu différentes.

- Règle 1 : si on obtient face on gagne 1 euro sinon on perd 1 euro
- Règle 2 : si on obtient face on gagne 1000 euros sinon on perd 1000 euros

1) Justifier que ces deux jeux sont équitables.  
(On note  $X$  et  $Y$  les variables aléatoires utilisées)

2) Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ .

3) Auquel des deux jeux joueriez-vous ?  
Quel calcul permet de mesurer le risque ?



**Exercice 14 : Roulette**

Au jeu de la roulette comportant 37 cases numérotées de 0 à 36, on peut jouer selon la règle du « plein » :

- on mise  $x$  euros sur un numéro compris entre 0 et 36.

- si le joueur a deviné le bon numéro, il gagne 35 fois sa mise.

1) On note  $G$  la variable aléatoire donnant le gain du casino .  
Calculer l'espérance de  $G$  (avantage du casino) et interpréter le résultat.



2 ) Le casino envisage une seconde règle selon laquelle un joueur peut aussi choisir de miser sur quatre numéros.

Par combien le casino doit-il multiplier la mise du joueur en cas de gain de celui-ci pour que l' avantage du casino soit le même avec les deux règles ?

3 ) L'écart type des gains est-il encore le même ?

1 ) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2 ) Déterminer la loi de probabilité de  $X$  .

3 ) Calculer l'espérance  $X$ .

4 ) Reprendre les questions précédentes en considérant des tirages sans remise . On note  $Y$  la nouvelle variable aléatoire.

### Variable aléatoire définie par répétition

#### **Ex 9-15 : Tirages avec et sans remise**

Une urne contient deux boules bleues et trois boules vertes . On tire deux boules de l'urne successivement et avec remise . On appelle  $X$  la variable aléatoire égale à 5 si les deux boules sont de la même couleur et égale à -3 si les boules sont de couleurs différentes.

**Ex 9-16 : Des glaces et des beignets**

Un marchand ambulant vend des glaces à 3 euros et des beignets à 2 euros. Le marchand sert trois clients qui achètent chacun un produit. On note  $G_i$  l'événement « le  $i$ ème client achète une glace » et  $B_i$  l'événement « le  $i$ ème client achète un beignet ». On a  $P(G_i) = 0,6$ .

1) Modéliser cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Calculer la probabilité de l'événement C « le marchand vend deux glaces et un beignet »

3) On note X la variable aléatoire donnant le nombre de glaces vendues. Déterminer la loi de probabilité de X.

4) Déterminer la probabilité qu'au moins deux glaces soient vendues.

**Ex 9-17 : Urne et variable aléatoire de gain**

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : trois rouges, quatre bleues et trois vertes.

Un joueur tire une boule au hasard :

- si elle est rouge, il gagne 10 euros
- si elle est bleue, il perd 8 euros
- si elle est verte, il remet la boule et rejoue.
- si la seconde boule tirée est rouge, il gagne 8 euros, sinon il perd 6 euros.

1) Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré et déterminer l'ensemble des issues possibles.



2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G égale au gain du joueur.

3) Calculer l'espérance de G et interpréter le résultat.

**Algorithmes - Python**

**Ex 9-18 : Simuler une expérience aléatoire**

1 ) Quelle expérience aléatoire est simulée par la fonction écrite en Python ci-dessous et comment est définie la variable aléatoire X ?

1	from random import randint	 
2		
3	def nb_jets():	
4	x=0	
5	s=0	
6	while (s<10) :	
7	t=randint(1,6)	
8	s=s+t	
9	x=x+1	
10	return(x)	

2 ) Compléter le programme ci-dessous utilisant la fonction nb\_jets() pour qu'il simule  $n$  fois l'expérience précédente et permette de compléter le tableau suivant :

11	c=[]
12	f= .....
13	n=int(input("Nombre de simulations :"))
14	for i in range(0,11):
15	c.append(0)
16	f.append(0)
17	
18	for i in range (.....):
19	x=.....
20	c[x]=.....
21	
22	for i in range(2,11):
23	f[i]=.....
24	print("P(X=",i,")=",f[i])
25	E=0
26	
27	for i in range(2,11):
28	E=.....
29	print ("L'espérance est environ",E)

$i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=i)$ $n=100$									
$P(X=i)$ $n=1000$									
$P(X=i)$ $n=10000$									

Les fréquences ont tendance à se stabiliser pour  $n$  suffisamment grand . Comment se nomme ce phénomène ?

Que calcule aussi ce programme ?

**Ex 9-19 : Un paradoxe historique**

À la cours de Florence au XVI<sup>e</sup> siècle, le Duc de Toscane fin observateur remarque que lorsque l'on lance trois dés et que l'on fait la somme des 3 résultats, la somme 10 apparaît plus fréquemment que la somme 9, alors que 9 et 10 se décomposent tous deux en six sommes de trois entiers compris entre 1 et 6.

1 ) Vérifier les dires du Duc de Toscane sur la décomposition de 9 et 10.

2 ) A l'aide d'un algorithme ou d'un tableau, calculer les fréquences d'apparition des sommes 9 et 10 sur un grand nombre de lancers de trois dés.



3 ) Expliquer le paradoxe.