

CONDITIONNEMENT – INDÉPENDANCE

1) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.

On appelle « **probabilité conditionnelle de A par rapport à B** » ou « **probabilité de A sachant B** » le réel, noté

$P_B(A)$ défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple :

Un lycée a présenté 356 candidats au bac, dont 96 suivant la spécialité SVT. 256 élèves ont été admis à l'examen ; parmi eux 64 ont suivi la spécialité SVT.

Un élève étant choisi au hasard parmi les candidats présentés par le lycée, on note A l'événement : « l'élève a suivi la spécialité SVT » et B l'événement : « l'élève a été reçu au bac ».

Chaque élève a la même chance d'être choisi ; par équiprobabilité, on a donc :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{64}{256} = \frac{1}{4} = 0,25$$

La probabilité que l'élève a suivi la spécialité SVT sachant qu'il est reçu au bac, est donc égale à 0,25.

$$\text{On a aussi } P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)} = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}$$

En général :
 $P_B(A) \neq P_A(B)$

Ainsi la probabilité que l'élève soit reçu au bac sachant qu'il a suivi la spécialité SVT est $\frac{2}{3}$.

Remarques :

- Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}$
- Si $B \subset A$, alors $A \cap B = B$ et $P_B(A) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Propriétés :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. On a :

$$0 \leq P_B(A) \leq 1 \quad \text{et} \quad P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$$

Preuve :

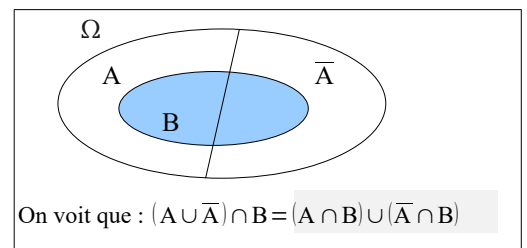
- On a $A \cap B \subset B$, donc $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$ et en divisant les trois membres de cette inégalité par le nombre strictement positif $P(B)$, on obtient : $0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq P_B(A) \leq 1$

- On a $P_B(A \cup \bar{A}) = \frac{P((A \cup \bar{A}) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B))}{P(B)}$

Or $P_B(A \cup \bar{A}) = P_B(\Omega) = 1$ et les événements $(A \cap B)$ et $(\bar{A} \cap B)$ sont incompatibles.

Ce qui donne :

$$1 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow 1 = P_B(A) + P_B(\bar{A}) \Leftrightarrow P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$$



2) PROBABILITÉ D'UNE INTERSECTION

Propriété : Formule des probabilités composées

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$. On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_B(A) \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = P(B) \times P_A(B)$$

Ces égalités se déduisent de la définition précédente.

Ces deux égalités se retiennent assez facilement : pour que l'événement A et B soit réalisé, il faut d'abord que l'événement A le soit, et sachant que l'événement A est réalisé, il faut ensuite que l'événement B le soit aussi ...

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et cinq rouges, indiscernables au toucher.

On tire au hasard une première boule de l'urne. Si elle est bleue, on la remet dans l'urne et on rajoute une autre boule bleue ; si elle est rouge, on ne la remet pas dans l'urne. On tire ensuite, au hasard, une seconde boule de l'urne.

On s'intéresse à la probabilité pour que les deux boules extraites soient bleues.

B_1 est l'événement : « la première boule extraite est bleue » ; B_2 est l'événement : « la seconde boule extraite est bleue ».

L'événement « les deux boules extraites sont bleues » est alors $B_1 \cap B_2$.

$$\text{On a } P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$$

Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc : $P(B_1) = \frac{3}{8}$

B_1 étant réalisé, on rajoute une boule bleue, si bien qu'au moment du second tirage il y a 4 boules bleues sur 9 boules dans l'urne.

$$\text{Ce qui permet d'écrire } P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{9}$$

On en déduit : $P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{6}$. La probabilité que les deux boules extraites soient bleues est donc égale à $\frac{1}{6}$

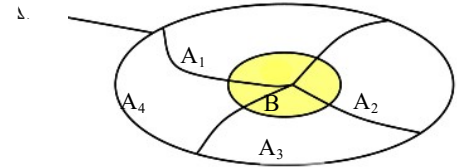
3) FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Ω est l'univers des événements élémentaires d'une expérience aléatoire. $A_1, A_2, \dots, A_n$ désignent des événements de Ω .

Définition :

Dire que $A_1, A_2, \dots, A_n$ réalisent **une partition** de l'univers Ω , signifie que :

- les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont deux à deux disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$



Tout événement B est alors la réunion **disjointe** des événements $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$

$$\text{On a donc } P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

On parle aussi de **système complet d'événements**.

De plus pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$

Propriété : Formule des probabilités totales

Dans les conditions précédentes on a :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

La deuxième formule permet de calculer la probabilité d'un événement B dans le cas (fréquent) où l'on connaît les probabilités $P(A_i)$ d'une famille d'événements A_i constituant une partition de l'univers Ω , ainsi que les probabilités conditionnelles de l'événement B par rapport à chaque événement A_i .

Exemple :

Un test d'une maladie est effectué sur la totalité d'une population.

Une étude statistique établit que 70 % de la population réagit négativement au test (événement N), 20 % réagit faiblement au test (événement F) et 10 % réagit fortement au test (événement R).

La probabilité pour une personne de cette population d'être atteinte de la maladie (événement M) est :

- 0,9 lorsque le test est fortement positif
- 0,6 lorsque le test est faiblement positif
- 0,05 lorsque le test est négatif

Par hypothèse, on a donc :

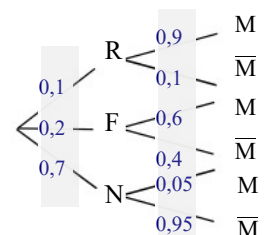
$$P(R) = 0,1, \quad P(F) = 0,2, \quad P(N) = 0,7, \quad P_R(M) = 0,9, \quad P_F(M) = 0,6 \quad \text{et} \quad P_N(M) = 0,05$$

Les événements R, F et N constituent une partition de la population.

D'après la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$$P(M) = P(R) \times P_R(M) + P(F) \times P_F(M) + P(N) \times P_N(M) = 0,1 \times 0,9 + 0,2 \times 0,6 + 0,7 \times 0,05 = 0,245$$

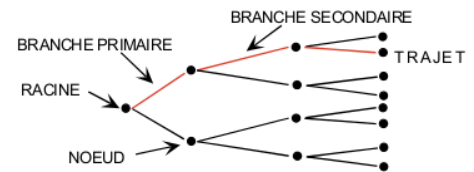
La probabilité pour qu'une personne de cette population soit atteinte de la maladie est donc égale à 0,245



4) RÈGLES DE CONSTRUCTION D'UN ARBRE PONDÉRÉ (ou arbre de probabilités)

Pour déterminer des probabilités, on peut être amené à construire des arbres (comme nous venons de le faire dans l'exemple précédent) dont les branches sont affectées de probabilités.

- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est la **racine** de l'arbre.
- Les traits partant de la racine sont appelés **branches primaires** de l'arbre. Elles mènent à des **nœuds**.
- Les branches joignant deux nœuds sont dites **secondaires**.
- Tout chemin menant de la racine à un nœud est appelé **trajet**.



Règles :

1. Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une **partition** de l'univers Ω .
2. Le **poids** d'une branche primaire est la **probabilité** de l'événement qui se trouve à son extrémité.
3. Le poids d'une branche secondaire est la **probabilité conditionnelle** de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
4. Le poids ou la probabilité d'un trajet est le **produit** des poids des branches le constituant. (*Probabilités composées*)
5. La probabilité d'un événement associé à plusieurs trajets complets est la **somme** des probabilités de ces trajets. (*Probabilités totales*)

Remarques :

- La somme des poids des branches primaires vaut 1. (*règle 1*)
- La somme des poids des branches secondaires issues d'un même nœud vaut 1.

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et deux boules rouges.

On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.

L'expérience aléatoire peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :

On note B_i : « la i ème boule est bleue » et R_i : « la i ème boule est rouge »

- La probabilité que la troisième boule soit rouge sachant que les deux premières étaient bleues est :

$$P_{B_1 \cap B_2}(R_3) = \frac{2}{3} \quad (\text{règle 3})$$

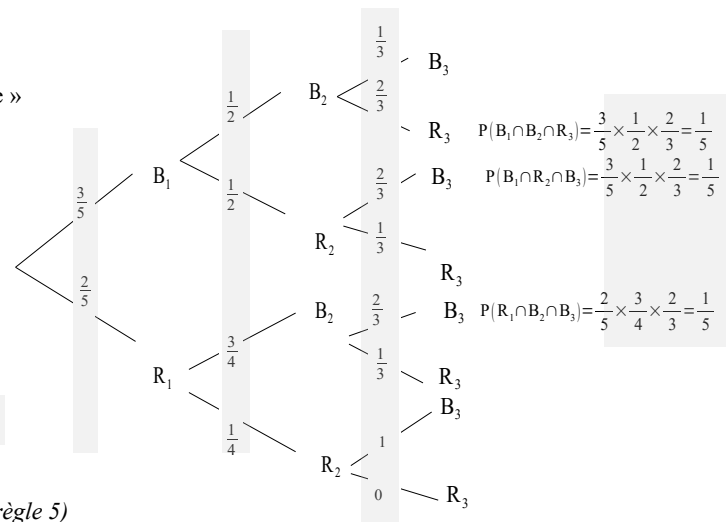
- La probabilité de l'événement $R_1 \cap B_2 \cap B_3$ est $\frac{1}{5}$ (*règle 4*)

- Soit A l'événement : « tirer une seule boule rouge ».

A est associé aux trajets $R_1 \cap B_2 \cap B_3$, $B_1 \cap R_2 \cap B_3$ et $B_1 \cap B_2 \cap R_3$.

On a :

$$P(A) = P(R_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \quad (\text{règle 5})$$



5) ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

Deux événements A et B de probabilités non nulles sont dits **indépendants** si le fait que l'un d'entre eux soit réalisé ou non n'influe pas la probabilité que l'autre soit réalisé, c'est à dire :

si $P_B(A) = P(A)$ ou si $P_A(B) = P(B)$

En utilisant la propriété précédente, on constate que l'indépendance de A et B se traduit par la relation $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Définition :

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.

A et B sont dits **indépendants** s'ils vérifient l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple :

Une urne contient quatre boules bleues numérotées b_1, b_1, b_2 et b_3 , et six boules rouges numérotées r_1, r_1, r_1, r_2, r_3 et r_4 .

On suppose toutes ces boules indiscernables au toucher, et on en tire une au hasard.

On considère les événements :

B : « la boule tirée est bleue » ; R : « la boule tirée est rouge » ; Q : « la boule tirée porte le numéro 4 » ; U : « la boule tirée porte le numéro 1 » .

Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc :

$$P(U) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} ; \quad P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad P(B \cap U) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$\text{On a : } P(B \cap U) = P(B) \times P(U)$$

Les événements B et U sont donc indépendants .

Ce résultat s'explique en remarquant que la proportion des boules bleues portant le numéro 1 parmi les boules portant le numéro 1 est la même que celle des boules bleues parmi les boules de l'urne.

$$\text{On a aussi } P(Q) = \frac{1}{10}, \quad P(B) = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad P(Q \cap B) = 0$$

$$\text{On a : } P(B \cap Q) \neq P(B) \times P(Q)$$

Les événements B et Q ne sont donc pas indépendants .

Remarques :

- Tout événement A est indépendant de l'évènement certain et de l'évènement impossible.
- Ne pas confondre événements **incompatibles** et événements **indépendants**.

Deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. On a alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans l'exemple précédent, les événements B et U sont indépendants, mais non incompatibles ; les événements B et Q sont incompatibles et non indépendants.

Propriété :

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.

Si A et B sont deux événements indépendants , alors il en est de même pour $\bar{A}$ et B.

Preuve :

On a :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) \\ \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) &= P(B) - P(B)P(A) \quad (\text{car A et B sont indépendants}) \\ \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) &= (1 - P(A))P(B) \\ \Rightarrow P(B \cap \bar{A}) &= P(\bar{A})P(B) \end{aligned}$$

On en déduit que $\bar{A}$ et B sont indépendants.

6) SUCCESSION DE PLUSIEURS ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Définition et propriété :

Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'influent pas les résultats de la seconde, on dit qu'il s'agit d'une **succession de deux épreuves indépendantes**.

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'eux.

Exemple :

On tire successivement deux cartes dans un jeu de 32 cartes et on note les deux cartes obtenues.
Deux cas se présentent :

- On remet la carte dans le paquet : les deux tirages sont indépendants.
- On ne remet pas la carte dans le paquet : le résultat du deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage et les deux tirages ne sont donc pas indépendants.

Si l'on remet la carte dans le paquet, la probabilité d'avoir deux rois est donc : $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

Définitions :

On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve ayant deux éventualités : l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\bar{S}$ avec la probabilité $1 - p$.

L'éventualité S correspond au "succès" de l'expérience, $\bar{S}$ étant alors "l'échec".

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière identique et indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités des branches le constituant.

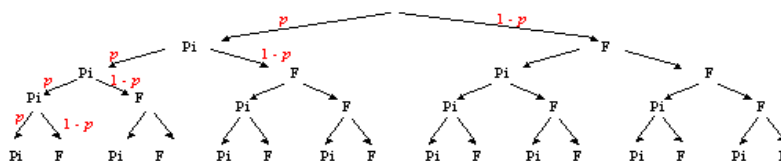
Exemple :

On jette une pièce de monnaie.

Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont P_i : "Pile" et F : "Face".

Notons $P(P_i) = p$ et $P(F) = 1 - p$ (si la pièce est équilibrée, on a $P(P_i) = \frac{1}{2}$ et $P(F) = \frac{1}{2}$).

On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce. On peut traduire la situation par un arbre pondéré.



L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 16 quadruplets de résultats correspondants chacun aux 16 chemins de l'arbre.

La probabilité d'obtenir le quadruplet $(P_i ; P_i ; F ; P_i)$ est $p \times p \times (1 - p) \times p = p^3(1 - p)$

Il y a 4 possibilités d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers. Ainsi la probabilité de l'événement obtenir trois pile est : $4 p^3(1 - p)$