

DÉRIVATION

1) LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN ZÉRO

A) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \frac{4-4(1-x)^2}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(0)$ n'existe pas, mais $f(x)$ est calculable pour toutes les valeurs de x très voisines de 0. Que deviennent les nombres $f(x)$ lorsque x prend des valeurs voisines de zéro, par exemple celles de $] -0,9 ; 0[\cup] 0 ; 0,9[$?

Le tableau de valeurs ci-dessous, nous permet de constater que les nombres $f(x)$ s'accumulent autour de 8, lorsque x est voisin de 0 ...

x	-0,9	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
$f(x)$	11,6	10	8,4	8,04	8,004	7,996	7,96	7,6	6	4,4

Le résultat n'est, en fait, pas surprenant. En effet :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \frac{4-4(1-2x+x^2)}{x} = \frac{8x-4x^2}{x} = 8-4x$

Ainsi, lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $8-4x$ s'accumulent autour de 8.

Plus précisément, ils finissent par se trouver dans tout intervalle $I =]8-\varepsilon ; 8+\varepsilon[$, aussi petit que soit ε , ($\varepsilon > 0$). Par exemple, si on choisit $\varepsilon = 0,001$, tous les nombres $8-4x$ sont dans I , lorsque $-0,00025 < x < 0,00025$.

On dit alors que 8 est la limite de f en 0 et on note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 8$

B) CAS GÉNÉRAL

Définition :

Soit f une fonction telle que zéro soit dans son ensemble de définition D_f ou soit une borne de D_f .
Intuitivement, dire que f a pour limite L en zéro, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro, « **les nombres $f(x)$ correspondent viennent s'accumuler autour de L** ».
C'est à dire que pour tout ε , ($\varepsilon > 0$), aussi petit qu'il soit, les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon ; L+\varepsilon[$.

On note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$

C) QUELQUES RÉSULTATS A CONNAÎTRE ... (admis)

Remarque importante:

On admet que si une fonction f est définie en 0 et si f admet une limite finie en 0 (on dit que f est continue en 0), alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée... et des composées de ces fonctions.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- Si, de plus, P et Q sont définies et positives au voisinage de 0, alors :
 $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{P(0)}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{Q(x)} = \sqrt[n]{Q(0)}$
- Soit P une fonction polynôme et Q est une fonction rationnelle définie en 0, alors :
 $\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = P(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = Q(0)$
- Soit f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L'$, alors :
 $\lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) = L+L'$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = L \times L'$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-3x^2 + 2x - 8) = -8 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x+2}{x^2+1} \right) = 2 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}} = \sqrt{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(-3x^2 + 2x - 8 + \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}} \right) = -8 + \sqrt{2}$$

2) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$.

Définition :

Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel L , revient à dire que le taux de variation de f en a , $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple : Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel quelconque.

Pour $h \neq 0$, on a : $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a$, donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

3) QUELQUES APPLICATIONS

A) TANGENTE EN UN POINT

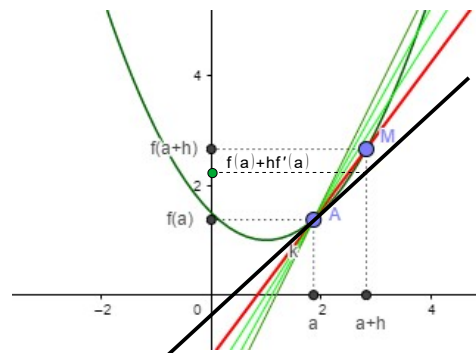
Un peu d'intuition ...

Soit M le point de C_f d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe.

Si f est dérivable en a , la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A .



Propriété :

Si f est dérivable en a , la courbe C_f admet au point $A(a; f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de la tangente en ce point est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Pour x proche de a , la fonction $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ est une bonne approximation linéaire de f .

En remplaçant x par $a+h$, et en choisissant h proche de zéro, on obtient alors une bonne approximation de $f(a+h)$:
 $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$

Preuve :

T (n'étant pas parallèle à l'axe des ordonnées) admet une équation de la forme $y = f'(a)x + p$. De plus elle passe par $(a; f(a))$.

On a donc : $f(a) = f'(a)a + p \Leftrightarrow p = f(a) - af'(a)$

T admet donc pour équation : $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \Leftrightarrow y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Cas particuliers importants :

- Si $f'(a) = 0$, C_f admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y = f(a)$.
- Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$), f n'est pas dérivable en a , mais C_f admet une tangente verticale d'équation $x = a$.

B) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe. On note $d(t)$, la distance qu'il a parcourue à l'instant t . (loi horaire)

Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 est la limite des vitesses moyennes

$$\frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$$

lorsque h tend vers 0. Il s'agit du nombre dérivé en t_0 de la fonction d .

Autres domaines... :

Le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (débit moyen, coût moyen de production ...).

Le nombre dérivé, lui, est une mesure instantanée (débit instantané, coût marginal ...).

4) FONCTIONS DÉRIVÉES

A) DÉFINITION

Définition :

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset D_f$) si pour tout x appartenant à I , le nombre dérivé de f en x existe.

La fonction dérivée de f sur I est la fonction, notée f' , qui, à tout x de I , associe le réel $f'(x)$.

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f' est « la dérivée de f »

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.

Remarque :

On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction f , l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f' est définie.

Cet ensemble (noté $D_{f'}$) est toujours inclus dans D_f .

B) DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

	Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
1)	$f : x \mapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$f' : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
2)	$f : x \mapsto x$	$f' : x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
3)	$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$ Cette fonction n'est pas dérivable en 0

Preuves : On choisit toujours h , au voisinage de a et de telle sorte que $f(a+h)$ soit définie.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$

, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 0$.

Ainsi, pour tout réel a , f est dérivable en a et $f'(a) = 0$

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = \frac{h}{h} = 1$

, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 1$.

Ainsi, pour tout réel a , f est dérivable en a et $f'(a) = 1$

3) Si $a > 0$.

Pour $h > 0$,

$$t(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}) \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

$$\text{Donc } t(h) = \frac{a+h-a}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}, \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Ainsi, pour tout réel $a > 0$, f est dérivable en a et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Si $a = 0$.

Pour $h > 0$, $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = +\infty$, ce qui n'est pas un réel...

Donc $f : x \mapsto \sqrt{x}$, n'est pas dérivable en 0.

5) OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

A) SOMME, PRODUIT ...

Propriétés :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D (D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints) et k un réel, alors :

- Les fonctions $k \cdot u$, $u + v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur D et :

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad (1), \quad (u + v)' = u' + v' \quad (2) \quad \text{et} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (3).$$

- Si pour tout réel a de D , $v(a) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (4), \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (5).$$

Preuves :

1) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour } h \neq 0, t(h) = \frac{(k \cdot u)(a+h) - (k \cdot u)(a)}{h} = \frac{k \cdot (u(a+h) - u(a))}{h} = k \cdot \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = k \cdot u'(a)$. Ainsi $k \cdot u$ est dérivable en a et $(k \cdot u)'(a) = k \cdot u'(a)$ pour tout $a \in D$.

2) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour } h \neq 0, t(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$. Ainsi $u + v$ est dérivable en a et $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$ pour tout $a \in D$.

3) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour } h \neq 0, t(h) = \frac{(u \cdot v)(a+h) - (u \cdot v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} v(a+h) = v(a)$ (admis, mais intuitif),

Alors $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a) = (u \cdot v)'(a)$, pour tout $a \in D$.

Ainsi $u \cdot v$ est dérivable en a et $(uv)'(a) = u(a)v'(a) + u'(a)v(a)$, pour tout $a \in D$.

4) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour tout } h \neq 0, t(h) = \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{\frac{v(a) - v(a+h)}{v(a) \times v(a+h)}}{h} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a) \times v(a+h)}$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} = -v'(a)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(a) \times v(a+h)} = \frac{1}{v(a)^2}$ (admis, mais intuitif).

Donc $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}$, pour tout $a \in D$.

Ainsi $\frac{1}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}$, pour tout $a \in D$.

5) Puisque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, il suffit de se rapprocher des preuves 3) et 4)...

B) CONSÉQUENCES : de nouvelles formules à retenir

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
$f : x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^3$	$f' : x \mapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$f' : x \mapsto -\frac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

Remarque :

Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$, alors $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^m)' = mx^{m-1} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Ainsi la formule de la dérivée de $f : x \mapsto x^n$ est vraie pour tout entier relatif n , en n'oubliant pas la condition $x \neq 0$ si $n < 0$.

C) DÉRIVÉE DE $f : x \mapsto g(ax+b)$ (hors programme, mais intéressant)

Propriété :

Soit a et b deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I .

Pour tout réel x , tel que $ax+b \in I$, la fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable, et on a :

$$f'(x) = ag'(ax+b)$$

Exemple : Déterminer sur $\mathbb{R}$ la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (2x-5)^4$

Pour tout réel x , on pose $f(x) = g(2x-5)$ où $g : x \mapsto x^4$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a : $g'(x) = 4x^3$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , on a : $f'(x) = 2g'(2x-5) = 2 \times 4 \times (2x-5)^3 = 8(2x-5)^3$

D) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES (hors programme, mais intéressant)

Propriétés :

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Remarque:

Si P est un polynôme de degré $n > 0$, alors P' est un polynôme de degré $n-1$.

Exemple :

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P : x \mapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$

P est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc P est dérivable et pour tout réel x :

$$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 1 = 9x^2 + 10x - 1.$$

Exemple :

Soit f la fonction rationnelle définie par $f : x \mapsto \frac{2x^2+1}{x-1}$

On peut écrire $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = 2x^2+1$ et $v(x) = x-1$

On a $v(x) = 0$ pour $x = 1$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \neq 1$, on a :

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v(x)^2} \text{ avec } u'(x) = 2 \times 2x = 4x \text{ et } v'(x) = 1$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{4x(x-1) - 1 \times (2x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}.$$