

## Chapitre 5 - PRODUIT SCALAIRE ( dans le plan )

### 1) PRODUIT SCALAIRE

#### A) DÉFINITION

→ Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan .

*Ce n'est pas une multiplication !*

Le **produit scalaire** de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} ( \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 )$$

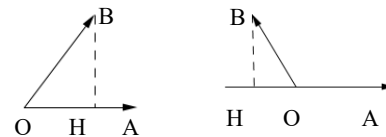
$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  où  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont les coordonnées respectives de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  dans **un repère orthonormal** quelconque.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$$

**Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

où O , A et B sont trois points du plan tels que  $\vec{u} = \vec{OA}$  et  $\vec{v} = \vec{OB}$  .



On note H **le projeté orthogonal** de B sur (OA), c'est à dire l'intersection entre (OA) et la perpendiculaire à (OA) passant par B.

Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel**

→ Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  , on pose  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  .

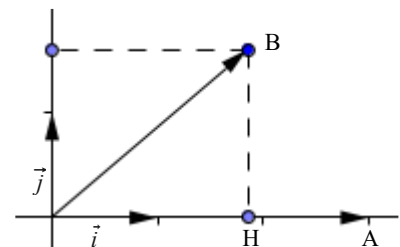
#### Preuve de l'égalité de ces quatre expressions :

- Montrons que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} ( \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 ) = xx' + yy'$  où  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont les coordonnées respectives de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  dans un repère orthonormal quelconque.

- Montrons que  $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = xx' + yy'$  où  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont les coordonnées respectives de  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  dans un repère orthonormal bien choisi ...

Choisissons un repère orthonormal  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  tel que  $\vec{i}$  et  $\vec{OA}$  soient colinéaires et de même sens.

On note  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  les coordonnées respectivement de  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$ .



- Montrons que  $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH \text{ si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

Dans le repère défini ci-dessus, l'abscisse de H est celle de B, c'est à dire  $OB \cos \widehat{AOB}$ .

Ainsi  $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} =$

Deux cas se présentent :

- Si  $\vec{OA}$  et  $\vec{OH}$  sont de même sens, alors  $\vec{i}$  et  $\vec{OH}$  sont de même sens et

- Si  $\vec{OA}$  et  $\vec{OH}$  sont de sens contraire, alors  $\vec{i}$  et  $\vec{OH}$  sont de sens contraire et

### Exemple 1 :

Soit A (2 ; 3), B (-1 ; 4) et C (-2 ; 1) trois points du plan muni d'un repère orthonormal.

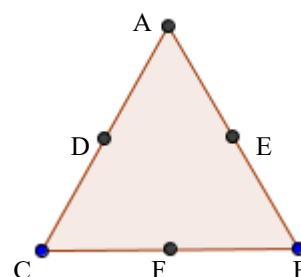
### Exemple 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que  $AB=3$ .  
( dans l'unité de longueur choisie ).

Les points E, F et D sont les milieux des côtés. On a alors:

•

•



## B ) REMARQUES

### - Signe du produit scalaire :

On déduit facilement le signe du produit scalaire  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  suivant la nature de l'angle  $\widehat{AOB}$ .

En effet les normes des deux vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  sont positives . On en déduit donc que  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  est du signe de  $\cos \widehat{AOB}$ .

|       | $0 \leq \widehat{AOB} < \frac{\pi}{2}$ | $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2} < \widehat{AOB} \leq \pi$ |
|-------|----------------------------------------|---------------------------------|------------------------------------------|
| Signe |                                        |                                 |                                          |

### - Le produit scalaire de deux vecteurs dépend de leur norme :

le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et -1 . On a donc:

### - Un cas agréable : les vecteurs colinéaires

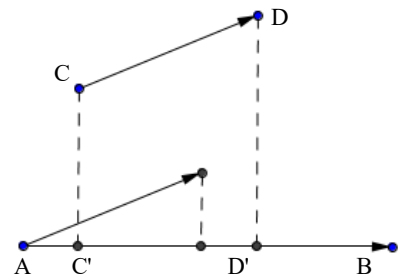
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires et de même sens**, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraire , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

### - Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée ( $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ) avec les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur du plan . On a alors  $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$  et  $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$

## C ) COMPLÉMENTS SUR LES PROJECTIONS ORTHOGONALES

- D'après ce qui précède, on peut compléter la quatrième égalité du tableau :  
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$   
 En effet  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$
- On a considéré les vecteurs de même origine, mais le résultat est le même dans les autres cas.  
 Si  $C'$  et  $D'$  sont les projetés orthogonaux de  $C$  et  $D$  sur  $(AB)$ ,  
 alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$



Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un d'eux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

## 2 ) PROPRIÉTÉS

### A ) OPÉRATIONS VECTORIELLES

#### Propriété :

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan et  $k$  un réel, on a :

**Symétrie:**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

**Linéarité:**  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$   
 $(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$  et  $\vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Conséquence :

$$a \cdot \vec{u} \cdot b \cdot \vec{v} = ab \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

(où  $a$  et  $b$  sont deux réels quelconques)

#### Preuve :

Pour la preuve, on se place dans un repère orthonormal et on note  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$  les coordonnées respectives de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ .

- Symétrie:** Immédiat, puisque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Linéarité:**  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

On démontre de même les autres égalités.

#### Exemples :

- Calculer  $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) =$
- Expliquer pourquoi les écritures suivantes n'ont pas de sens :

- «  $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$  » :

- «  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$  » :

- «  $\vec{u} \cdot (k + \vec{v})$  » :

#### Remarques :

Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais **attention** il ne faut pas généraliser :

- En effet, on peut avoir en particulier  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  avec  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .
- D'autre part  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$  n'implique pas  $\vec{v} = \vec{w}$ .

## B ) CARRÉ SCALAIRE ET NORME

#### Définition :

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  du plan, le produit scalaire de  $\vec{u}$  par lui-même,  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est appelé **carré scalaire** de  $\vec{u}$ . On le note  $\vec{u}^2$

$$\text{On a : } \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}|| ||\vec{u}|| = ||\vec{u}||^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B :  $\overrightarrow{AB}^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 = AB^2$

### Remarques :

- Un vecteur  $\vec{u}$  est unitaire si et seulement si  $\vec{u}^2 = 1$ .
- Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** ( bien familiers ... )

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

### 3 ) PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

#### Propriété :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

#### Preuve :

- Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , le résultat est évident.
- Supposons  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . On note  $\alpha$  l'angle entre  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

#### Remarques:

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- On ne modifie pas le produit scalaire de deux vecteurs en ajoutant à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.  
Si  $\vec{w} \perp \vec{u}$ , alors

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + 0 = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  est  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$   
On en déduit que:  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

### 4 ) QUELQUES APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

#### A ) LE THEOREME D'AL KASHI

##### Théorème : ...

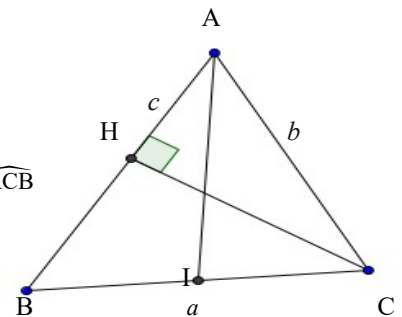
Soit ABC un triangle quelconque.

On a :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$   
Ce théorème est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé

L'usage est de noter :

- $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$

- $\hat{A} = \widehat{BAC}$ ,  $\hat{B} = \widehat{ABC}$ ,  $\hat{C} = \widehat{ACB}$



#### Preuve :

#### Remarques :

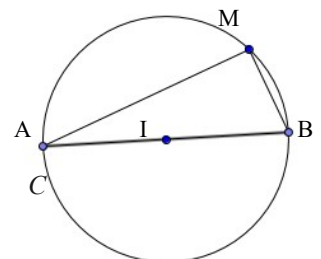
- De la même façon, on montre que :
- Si le triangle est rectangle en A, alors  $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \hat{A} = 0$  et ...  $a^2 = b^2 + c^2$  ( On retrouve le théorème de Pythagore )

#### B ) ÉTUDIER UN ENSEMBLE DE POINT : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

##### Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de [AB].

- Pour tout point M du plan,  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$
- L'ensemble des points M du plan tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  est le cercle de diamètre [AB]



#### Preuve :