

PRODUIT SCALAIRE (dans le plan)

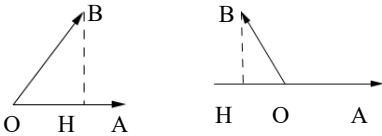
1) PRODUIT SCALAIRE

A) DÉFINITION

→ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan .

Ce n'est pas une multiplication !

Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 - \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2)$	
$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ sont les coordonnées respectives de } \vec{u} \text{ et de } \vec{v} \text{ dans un repère orthonormal quelconque.}$	
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$ <i>Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.</i>	où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$.  On note H le projeté orthogonal de B sur (OA), c'est à dire l'intersection entre (OA) et la perpendiculaire à (OA) passant par B.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$	
<i>Le produit scalaire de deux vecteurs est un réel</i>	

→ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Preuve de l'égalité de ces quatre expressions :

- Montrons que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = xx' + yy'$ où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans un repère orthonormal quelconque.

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ donc:

$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2 = x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy'$ et donc:

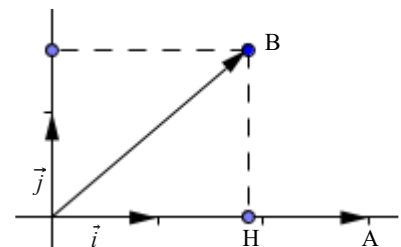
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) &= \frac{1}{2} [(x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy') - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy' - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2) \\ &= \frac{1}{2} (2xx' + 2yy') = xx' + yy' \end{aligned}$$

- Montrons que $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = xx' + yy'$ où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ dans un repère orthonormal bien choisi ...

Choisissons un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\vec{OA}$ soient colinéaires et de même sens.

On note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées respectivement de $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$.

On a alors: $x = OA$, $y = 0$, $x' = OB \cos \widehat{AOB}$ et $y' = OB \sin \widehat{AOB}$
Ainsi $xx' + yy' = OA \times OB \cos \widehat{AOB} + 0 \times OB \sin \widehat{AOB}$
Donc $xx' + yy' = OA \times OB \cos \widehat{AOB}$.



- Montrons que $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH \text{ si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

Dans le repère défini ci-dessus, l'abscisse de H est celle de B, c'est à dire $OB \cos \widehat{AOB}$.

Ainsi $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = OA \times x_H$

Deux cas se présentent :

- Si $\vec{OA}$ et $\vec{OH}$ sont de même sens, alors $\vec{i}$ et $\vec{OH}$ sont de même sens et $x_H = OH$;
d'où $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = OA \times OH$
- Si $\vec{OA}$ et $\vec{OH}$ sont de sens contraire, alors $\vec{i}$ et $\vec{OH}$ sont de sens contraire et $x_H = -OH$;
d'où $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = -OA \times OH$

Exemple 1 :

Soit A (2 ; 3), B (-1 ; 4) et C (-2 ; 1) trois points du plan muni d'un repère orthonormal.

On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (-3) \times (-1) + (-3) \times 1 = 0$

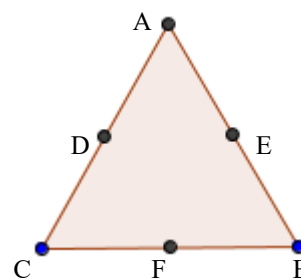
Exemple 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB=3$.
(dans l'unité de longueur choisie).

Les points E, F et D sont les milieux des côtés. On a alors:

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC} = 3 \times 3 \times \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{9}{2}$
ou $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AE = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

- $\vec{AB} \cdot \vec{CE} = AB \times CE \times \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$
ou le projeté orthogonal de $\vec{CE}$ sur (AB) est le vecteur nul, donc $\vec{AB} \cdot \vec{CE} = 0$



B) REMARQUES

- Signe du produit scalaire :

On déduit facilement le signe du produit scalaire $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ suivant la nature de l'angle $\widehat{AOB}$.

En effet les normes des deux vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont positives . On en déduit donc que $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ est du signe de $\cos \widehat{AOB}$.

	$0 \leq \widehat{AOB} < \frac{\pi}{2}$	$\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \widehat{AOB} \leq \pi$
Signe	$\vec{OA} \cdot \vec{OB} > 0$	$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$	$\vec{OA} \cdot \vec{OB} < 0$

- Le produit scalaire de deux vecteurs dépend de leur norme :

le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et -1 . On a Donc : $-||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq ||\vec{u}|| ||\vec{v}||$

- Un cas agréable : les vecteurs colinéaires

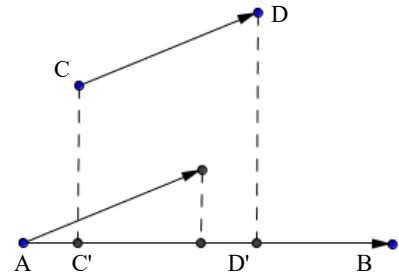
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| ||\vec{v}||$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire , alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| ||\vec{v}||$

- Expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée ($\vec{i}$, $\vec{j}$) avec les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan . On a alors $x = \vec{u} \cdot \vec{i}$ et $y = \vec{u} \cdot \vec{j}$

C) COMPLÉMENTS SUR LES PROJECTIONS ORTHOGONALES

- D'après ce qui précède, on peut compléter la quatrième égalité du tableau :
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$
 En effet $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$
- On a considéré les vecteurs de même origine, mais le résultat est le même dans les autres cas.
 Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB),
 alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$



Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un d'eux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

2) PROPRIÉTÉS

A) OPÉRATIONS VECTORIELLES

Propriété :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Symétrie: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Linéarité: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
 $(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$

Conséquence :

$$a \cdot \vec{u} \cdot b \cdot \vec{v} = ab \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

(où a et b sont deux réels quelconques)

Preuve :

Pour la preuve, on se place dans un repère orthonormal et on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- Symétrie:** Immédiat, puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- Linéarité:**
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x(x' + x'') + y(y' + y'') \\ &= xx' + xx'' + yy' + yy'' \\ &= xx' + yy' + xx'' + yy'' \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

On démontre de même les autres égalités.

Exemples :

- Calculer $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) = 6\vec{u} \cdot \vec{u} + 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 4\vec{v} \cdot \vec{u} - 2\vec{v} \cdot \vec{v} = 6\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{v} \cdot \vec{v}$
- Expliquer pourquoi les écritures suivantes n'ont pas de sens :

- « $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ » : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un réel, alors que $\vec{w}$ est un vecteur . Le produit scalaire entre un vecteur et un réel n'existe pas.

- « $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ » : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est un réel, alors que $\vec{w}$ est un vecteur . La somme entre un vecteur et un réel n'existe pas.

- « $\vec{u} \cdot (k + \vec{v})$ » : k est un réel, alors que $\vec{v}$ est un vecteur . La somme entre un vecteur et un réel n'existe pas.

Remarques :

Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais **attention** il ne faut pas généraliser :

- En effet, on peut avoir en particulier $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- D'autre part $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'implique pas $\vec{v} = \vec{w}$.

B) CARRÉ SCALAIRE ET NORME

Définition :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$

$$\text{On a : } \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$$

$$\text{Ce qui donne, pour deux points A et B : } \overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$$

Remarques :

- Un vecteur $\vec{u}$ est unitaire si et seulement si $\vec{u}^2 = 1$.
- Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers ...)

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

3) PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Preuve :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est évident.
- Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. On note α l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\text{On a } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$$

$$\text{Or } \|\vec{u}\| \neq 0 \text{ et } \|\vec{v}\| \neq 0, \text{ donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Remarques :

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- On ne modifie pas le produit scalaire de deux vecteurs en ajoutant à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.
 Si $\vec{w} \perp \vec{u}$, alors

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + 0 = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
 On en déduit que: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

4) QUELQUES APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

A) LE THEOREME D'AL KASHI

Théorème : ...

Soit ABC un triangle quelconque.

$$\text{On a : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Ce théorème est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé

L'usage est de noter :

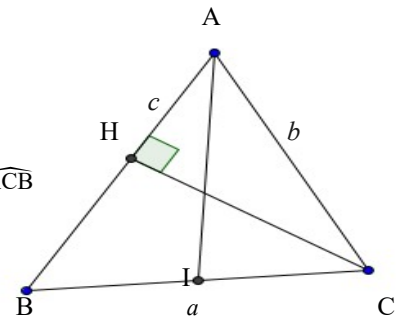
$$\bullet \quad BC = a, AC = b, AB = c$$

$$\bullet \quad \hat{A} = \widehat{BAC}, \hat{B} = \widehat{ABC}, \hat{C} = \widehat{ACB}$$

Preuve :

$$\text{On a } \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$

$$\text{Ainsi } a^2 = (\vec{BC})^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \vec{AC} \cdot \vec{AB} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



Remarques :

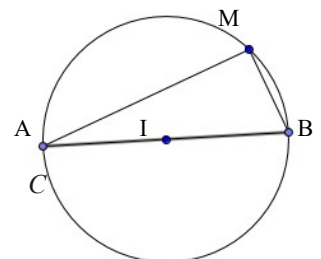
- De la même façon, on montre que : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$
- Si le triangle est rectangle en A, alors $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\cos \hat{A} = 0$ et ... $a^2 = b^2 + c^2$ (On retrouve le théorème de Pythagore)

B) ÉTUDIER UN ENSEMBLE DE POINT : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$

Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de [AB].

- Pour tout point M du plan, $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$
- L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB]



Preuve :

$$\text{- On a : } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = \vec{MI}^2 - \vec{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$\text{- On a : } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow M \in C_{\left(I; \frac{AB}{2}\right)}$$

Il s'agit bien du cercle de diamètre [AB]