

**Définition :**

Le produit scalaire de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-contre :

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur du plan muni d'une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$ .  
On a alors :

$$x = \vec{u} \cdot \vec{i} \quad \text{et} \quad y = \vec{u} \cdot \vec{j}$$

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} ( \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 )$$

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

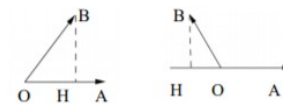
où  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont les coordonnées respectives de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  dans **un repère orthonormal** quelconque.

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$$

où O, A et B sont trois points du plan tels que  $\vec{u} = \vec{OA}$  et  $\vec{v} = \vec{OB}$ .

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \vec{OA} \text{ et } \vec{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$



On note H le **projeté orthogonal** de B sur (OA), c'est à dire l'intersection entre (OA) et la perpendiculaire à (OA) passant par B.

Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel**.  
Ce n'est surtout pas un vecteur.

**Avec des vecteurs colinéaires :**

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires et de même sens**, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

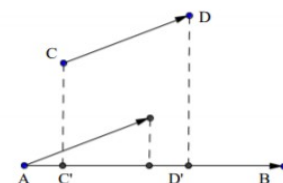
Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires et de sens contraire**, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

**Avec des projections orthogonales :**

Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB), alors

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$$

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.



**Propriétés :**

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan et  $k$  un réel, on a :

**Symétrie :**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

**Linéarité :**  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$   
 $(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$  et  $\vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k (\vec{u} \cdot \vec{v})$

**Carré scalaire et norme :**

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  du plan, le produit scalaire de  $\vec{u}$  par lui même,  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est appelé **carré scalaire** de  $\vec{u}$ .  
On le note  $\vec{u}^2$ . On a :

$$\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B :  $\vec{AB}^2 = \|\vec{AB}\|^2 = AB^2$

**Produit scalaire et orthogonalité :**

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

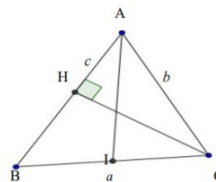
**Applications :**

**Théorème d'Al Kashi :**

On a :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

Soit ABC un triangle quelconque.

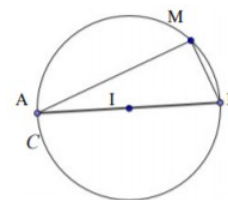
Ce théorème est aussi appelé **théorème de Pythagore généralisé**.



**Cercle :**

Soit A et B deux points distincts du plan.

L'ensemble des points M du plan tels que  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  est le cercle de diamètre [AB]



**Méthode à connaître :**

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M du plan,  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

En effet :  $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = \vec{MI}^2 - \vec{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$