

Normes, projections orthogonales**Ex 5-1 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours**

- 1) $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$
- 2) $\| -5 \overrightarrow{u} \| = -5 \|\overrightarrow{u}\|$
- 3) Si $\|\overrightarrow{u}\| = 3$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 4$, alors $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = 7$
- 4) Si I est le milieu de [AB], alors $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AI}\| + \|\overrightarrow{IB}\|$
- 5) Si A, B et C sont trois points alignés, alors $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\|$
- 6) Si les projections orthogonales de deux vecteurs sont égales, alors ces deux vecteurs sont égaux.
- 7) Si $\overrightarrow{AB}$ a pour projeté orthogonal $\overrightarrow{A'B'}$ sur une droite d , alors $ABB'A'$ est un parallélogramme.
- 8) Si ABCD est un parallélogramme, alors le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur une droite d est égal au projeté orthogonal de $\overrightarrow{DC}$ sur d .
- 9) Si $\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur une droite d , alors $\|\overrightarrow{u'}\| \leq \|\overrightarrow{u}\|$
- 10) Si $\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{u}$ sur une droite d , alors $3\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $3\overrightarrow{u}$ sur d .

Ex 5-2 : Normes

Soit un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ ou du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1) $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

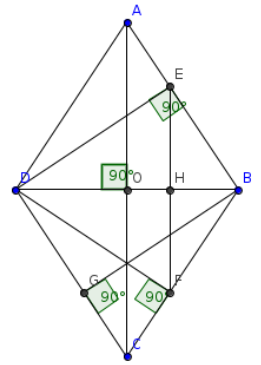
2) $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-5 \\ \sqrt{3}+5 \end{pmatrix}$

3) A $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ et B $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$

Ex 5-3 : Projection orthogonale

ABCD est un losange de centre O.
ABD est un triangle équilatéral. Déterminer les projections orthogonales suivantes :

- 1) $\overrightarrow{AB}$ sur (BD) :
- 2) $\overrightarrow{AD}$ sur (DE) :
- 3) $\overrightarrow{AD}$ sur (DF) :
- 4) $\overrightarrow{DE}$ sur (DB) :
- 5) $\overrightarrow{DE}$ sur (BG) :
- 6) $\overrightarrow{EF}$ sur (AC) :

**Les différentes expressions du produit scalaire****Ex 5-4 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours**

- 1) Si $\|\overrightarrow{u}\| = 5$, $\|\overrightarrow{v}\| = 12$ et $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 20$
(où α représente l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$)

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA}$

Pour les questions 3, 4 et 5, on considère que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$

3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{GH}$

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{CD}$

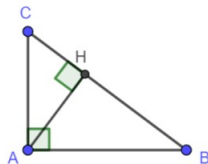
5) $\overrightarrow{AA} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$

6) Si les points A, B et C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$

Pour les dernières questions, on considère un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

7) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

8) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$



9) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} > 0$

10) $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{CA} > 0$

11) $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC}$

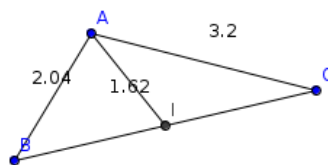
12) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$

13) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$

Ex 5-5 : Choisir la méthode la plus adaptée

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

1) $AB=4$, $AC=5$ et $\widehat{BAC} = 45^\circ$



2) $AB=2$, $AC=7$ et $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}$

3) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a $A(2;3)$, $B(-4;5)$ et $C(-5;-7)$

4) ABCD est un losange dont la longueur des côtés vaut 4 et tel que $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{6}$. On donnera une approximation à 10^{-2} près.

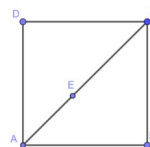
5) I est le milieu de [BC].

Ex 5-6 : Choisir la méthode la plus adaptée

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

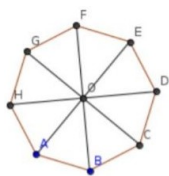
1) Soit ABCD un carré de côté 4 et E, le point du segment [AC] tel que $AE=0,4AC$.

Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$



2) On considère l'octogone ci-contre avec $HD=8$.
Calculer :

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OG}$$



$$\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FD}$$

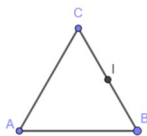
$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FA}$$

3) ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm.
I est le milieu de [BC].

Calculer :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$



$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}$$

Calculer un angle ou une longueur avec le produit scalaire

Ex 5-7 : Déterminer un angle

1) Dans chacun des cas calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire $\widehat{BAC}$

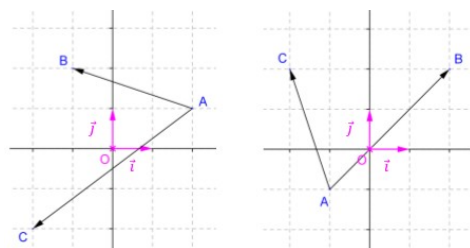
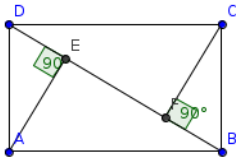


figure 1 :

figure 2 :

Ex 5-8 : Déterminer une longueur

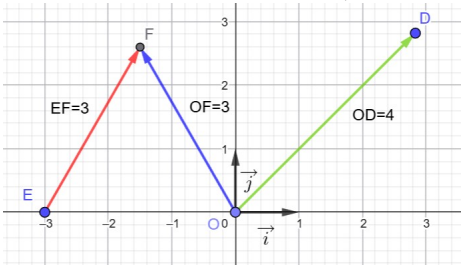
On considère un rectangle ABCD tel que AB=5 et AD=3.
Les points E et F sont les projetés orthogonaux des points A et C sur la droite (BD).
En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$, déterminer la valeur exacte de la longueur EF.



Calculer des coordonnées avec le produit scalaire

Ex 9 : Coordonnées à l'aide du produit scalaire

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point E(-3;0), le point F d'ordonnée positive, tel que EF=OF=3 et le point D situé sur la droite d'équation $y=x$ tel que OD=4.
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{EF}$.



Propriétés – Opérations vectorielles**Ex 5-10 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours**

1) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{t}$, alors $\vec{v} = \vec{t}$

2) Si $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$, alors $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

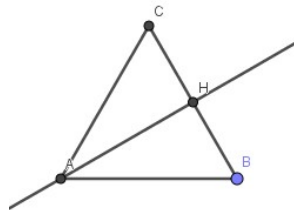
3) Si $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$, alors $\vec{u} = \vec{v}$ ou $\vec{u} = -\vec{v}$

4) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $4\vec{u}$ et $-5\vec{v}$ sont orthogonaux.

5) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Pour les dernières questions, on considère un triangle équilatéral ABC et H le pied de la hauteur issue de A.

6) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AH^2$



7) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0,5 AB^2$

8) $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0,75 AB^2$

Ex 5-11 : Quelques calculs

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}=8$
Calculer :

1) $\vec{u} \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$

2) $(\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v})$

3) $(\vec{u} - 3\vec{v})^2$

4) $\|\vec{u} + \vec{v}\|$

5) $\|\vec{u} - \vec{v}\|$

6) $\|2\vec{u} - 5\vec{v}\|$

Ex 5-12 : Avec les normes

1) Existe-t-il deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$

2) Montrer que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

3) Peut-on déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :
 $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

Ex 5-13 : Relation de Chasles et linéarité

Soit 4 points A, B, C et D tels que $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 4$ et $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3$.
 Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$

Orthogonalité et alignement

Ex 5-14 : Vecteurs orthogonaux ?

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Dans chacun des cas, dire si les vecteurs sont orthogonaux :

1) $\vec{u} \begin{pmatrix} 4876 \\ -4898873 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 317019173 \\ 315539 \end{pmatrix}$

2) $\vec{r} \begin{pmatrix} 18^{497} \\ 17^{254} \end{pmatrix}$ et $\vec{t} \begin{pmatrix} 18^{217} \\ -17^{460} \end{pmatrix}$

3) $\vec{w} \begin{pmatrix} 18^{497} \\ 306^{43} \end{pmatrix}$ et $\vec{s} \begin{pmatrix} -17^{497} \\ 306^{454} \end{pmatrix}$

Ex 5-15 : Triangle rectangle

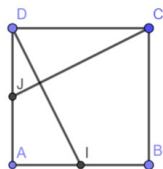
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne $M(2; \lambda)$, $A(1; 3)$ et $L(4; 3 - \lambda)$.

Déterminer le(s) réel(s) λ tel que le triangle MAL soit rectangle en A.

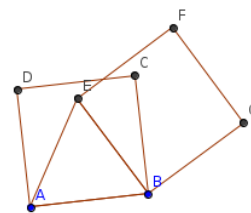
Ex 5-16 : Démontrer que des droites sont perpendiculaires

Soit ABCD un carré de côté a , I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].
Démontrer que les droites (CJ) et (DI) sont perpendiculaires.

**Ex 5-17 : Démontrer que des points sont alignés**

Soit ABE un triangle équilatéral de côté a ,
le carré ABCD contenant E et le carré EBGF contenant C.

1) Exprimer $\vec{BC} \cdot \vec{BE}$ et $\vec{EA} \cdot \vec{EB}$ en fonction de a .



2) Montrer que BCG est un triangle équilatéral.

3) Exprimer $\vec{BC} \cdot \vec{BG}$ et $\vec{DA} \cdot \vec{EF}$ en fonction de a .

4) Exprimer $\vec{AE} \cdot \vec{EF}$ en fonction de a .

5) En déduire la valeur de $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF}$.

6) Démontrer que les point D, E et G sont alignés.

Ex 5-18 : Caractériser un quadrilatère

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a .

D et E sont les points tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ en fonction de a .

2) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

3) Démontrer que les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires.

4) On note H le point d'intersection des droites (AC) et (DE).
Exprimer $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ en fonction de a , puis déterminer la distance AH.

5) En déduire la nature du quadrilatère EBHC.

Ex 5-19 : Dans un parallélogramme – Théorème d’Al Kashi

Soit ABCD un parallélogramme de centre I tel que $AB=6$, $AD=4$ et

$$\widehat{BAD}=60^\circ.$$

1) Calculer $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2$ et $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2$. En déduire AC et BD.

2) À l'aide du théorème d'Al Kashi, retrouver la distance BD.

Ex 5-20 : Théorème de la médiane

Soit un triangle ABC . On note I le milieu de [BC].

Montrer que $AB^2 + AC^2 = 2 AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

Ex 5-21 : Théorème de la médiane et théorème d’Al Kashi

On souhaite construire un parallélogramme ABCD dont on connaît les longueurs des diagonales et un angle :

$$AC=7, \quad BD=\sqrt{19} \quad \text{et} \quad \widehat{BAD}=60^\circ.$$

On pose $x=AB$ et $y=AD$.

1) A l'aide du théorème de la médiane, démontrer que $x^2 + y^2 = 34$.

2) En utilisant l'angle $\widehat{BAD}$, démontrer que $x^2 + y^2 - xy = 19$.

3) En déduire les dimensions du parallélogramme ABCD et le construire.

Ensembles de points

Ex 5-22 : Conjecture avec GeoGebra : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$

Soit A et B deux points tels que $AB=4$ cm . On cherche l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$, ($k \in \mathbb{R}$).

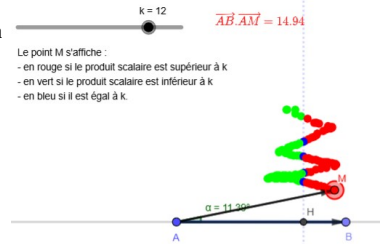
1) Dans GeoGebra, placer deux points A et B tels que $AB=4$.

2) Créer un point libre M puis une expression « ps » permettant de calculer

le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$. (Utiliser la formule avec les normes et les angles)

3) Créer un curseur « k » variant de -20 à 20, puis définir un affichage conditionnel de M en rouge lorsque $ps > k$, en vert lorsque $ps < k$ et en bleu lorsque $ps = k$.

(Clic droit sur le point > propriétés > avancé > couleurs dynamique)



4) Choisir $k=12$, puis activer la trace de M et balayer la zone de construction jusqu'à pouvoir conjecturer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 12$.

Démontrer cette conjecture.

5) **Régionnement du plan :**

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} \geq 12$

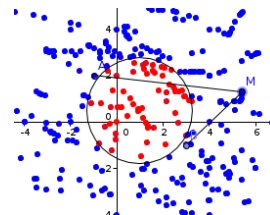
6) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -6$

Ex 5-23 : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

Soit les points A(-1;2) et B(3;-1).

1) Déterminer l'ensemble F_1 des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -1$

Introduire le milieu I de [AB].



2) Déterminer l'ensemble F_2 des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\frac{25}{4}$$

3) Déterminer l'ensemble F_3 des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\frac{27}{4}$$

4) Déterminer l'ensemble F_4 des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leq -1$$

2) En raisonnant par disjonction de cas sur le signe de $k - \frac{AB^2}{2}$,

caractériser l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$

Ex 5-24 : $MA^2 + MB^2 = k$

Soit A et B deux points distincts du plan, I le milieu du segment [AB] et k un nombre réel.

1) Pour tout point M du plan, montrer que :

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} \left(k - \frac{AB^2}{2} \right)$$