

VARIATIONS ET COURBES REPRÉSENTATIVES DE FONCTIONS

1) FONCTION PAIRE – FONCTION IMPAIRE

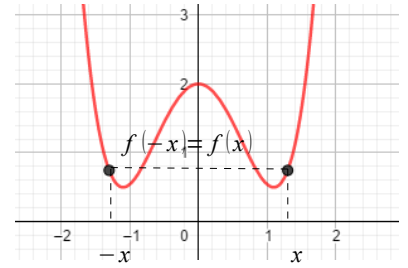
A) FONCTION PAIRE

Définitions :

On dit qu'un ensemble I est **centré en zéro** si pour tout élément x de I , $-x$ est aussi dans I .

Soit f une fonction définie sur un ensemble I centré en zéro.

On dit que f est **paire** si, pour tout réel x de I , $f(-x) = f(x)$.



Propriété :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour **axe de symétrie**.

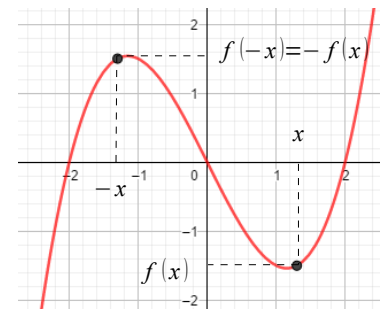
Remarque : La fonction carré est paire

B) FONCTION IMPAIRE

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble I **centré en zéro**.

On dit que f est **impair** si, pour tout réel x de I , $f(-x) = -f(x)$.



Propriété :

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine du repère pour **centre de symétrie**.

Remarques :

- La fonction inverse, la fonction cube et les fonctions linéaires sont impaires
- La fonction racine carrée et les fonctions affines (non linéaires) ne sont ni paires, ni impaires.

2) DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

A) DU SENS DE VARIATION AU SIGNE DE LA DÉRIVÉE

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

- Si f est croissante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) = 0$.

Preuve : (de la première propriété ... les deux autres se démontrent de la même façon)

Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in I$.

f est croissante sur I ; elle conserve donc le sens des inégalités

Ainsi les différences $f(x+h) - f(x)$ et $(x+h) - x$ ont le même signe.

On en déduit que le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est toujours positif.

f est dérivable en x donc $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite finie $f'(x)$ lorsque h tend vers 0.

Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ prend des valeurs positives et sa limite en 0 est donc nécessairement positive.

On a donc $f'(x) \geq 0$.

B) DU SIGNE DE LA DÉRIVÉE AU SENS DE VARIATION

Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- Si pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- Si pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Remarques :

- Si la dérivée f' est strictement positive sur I , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si la dérivée f' est strictement négative sur I , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 9$.

f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2$.

$f'(0) = 0$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) > 0$.

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
f	9		

On indique :

- le signe de $f'(x)$
- les zéros de f' , c'est à dire les réels x , tels que $f'(x) = 0$
- les valeurs de f pour les zéros de f'

On ne met jamais de valeurs approchées dans un tel tableau...

Attention : Il est fondamental de se placer sur un intervalle.

Exemple :

La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ce qui est strictement négatif sur $\mathbb{R}^*$.

Comme vous le savez ... f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$; elle l'est indépendamment sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Remarques :

Pour étudier le sens de variation d'une fonction il n'est pas toujours utile de dériver. N'oubliez pas :

- La définition
- les sommes de fonctions

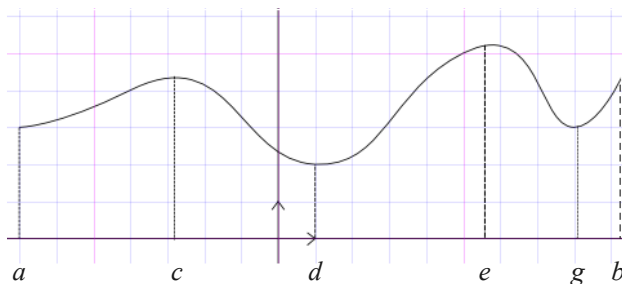
Exemple : Soit $f : x \mapsto x^2 + x - 2$

On peut écrire, $f = u + v$ où $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x - 2$.

u et v sont deux fonctions croissantes sur $[2; +\infty[$; donc f est croissante sur $[2; +\infty[$.

3) EXTREMUM D'UNE FONCTION

A) LA NOTION D'EXTREMUM LOCAL (ou relatif)



Sur l'intervalle $[a; b]$, la fonction f représentée ci-contre admet un maximum en e et un minimum en d .

« Autour » de c et de g , on remarque que le comportement de f n'est pas banal ...

On constate que *localement* f admet un maximum en c et un minimum en g .

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I distinct des extrémités.

On dit que f admet un maximum local (respectivement un minimum local) en c si $f(c)$ est le maximum (respectivement minimum) de f restreinte à un intervalle **ouvert** contenant c .

Remarque sur les extrémités :

Sur un intervalle fermé $[a ; b]$, on peut définir un extremum local en a ou en b .

Par exemple, dire que $f(a)$ est un maximum local signifie que $f(a)$ est le maximum de f sur un intervalle $[a ; \alpha]$, où $\alpha \leq b$.

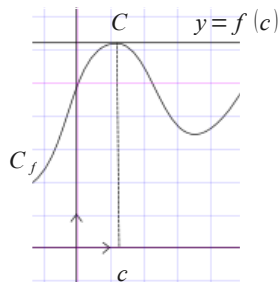
Les fonctions que nous étudierons cette année admettront toujours un extremum en a et en b .

B) QUEL LIEN AVEC LA DÉRIVATION ?

Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c un réel de I .

Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$



Conséquences graphiques:

On a $f'(c) = 0$, ainsi le coefficient directeur de la tangente à C_f en C est nul; la tangente est horizontale.

Remarques :

- Il est important que I soit ouvert.

Exemple : $f : x \mapsto x^2$ et $I = [0 ; 1]$, $f(1) = 1$ est le maximum de f sur I et pourtant $f'(1) = 2 \dots$

- Une fonction non dérivable en un réel peut admettre un extremum en ce réel.

Exemple : Pensez à la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 ...

- La réciproque de ce théorème est fausse: Si $f'(c) = 0$, on n'a pas forcément un extremum en c .

Exemple : $f : x \mapsto x^3$, $f'(0) = 0$ et pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local de f , mais un point d'inflexion...

Pour fixer les idées, on choisit les extremums éventuels de f parmi les réels c vérifiant :

- c est une borne de I ,
- c est un réel où f n'est pas dérivable,
- c est un réel où f est dérivable et tel que $f'(c) = 0 \dots$ mais comment choisir ?

Deux configurations à retenir :

Supposons que l'on puisse extraire du tableau de variation d'une fonction une telle configuration...

x	...	c	...
$f'(x)$	+	0	-
f			

x	...	c	...
$f'(x)$	-	0	+
f			

La dérivée s'annule et change de signe ... il semble que l'on soit en présence d'un extremum local.

Propriété : admise

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I .

Si la dérivée f' s'annule en c en **changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I .