Correction détaillée : suites auxiliaires

Première spécialité mathématiques

Méthode générale. Dans chaque exercice, on suit le même schéma : (1) on exprime v_{n+1} en fonction de v_n (ou de u_n) ; (2) on en déduit une propriété de (v_n) (constante, positive, monotone, explicite) ; (3) on *revient* à (u_n) grâce à la relation entre u_n et v_n ; (4) on interprète l'algorithme Python. Les résultats admis par récurrence dans l'énoncé sont utilisés tels quels.

Correction de l'exercice 1 — Une suite qui converge très vite

Question 1. $u_1 = u_0^2 - 2u_0 + 2 = \dfrac{9}{4} - 3 + 2 = \dfrac{5}{4}$ et $u_2 = \dfrac{25}{16} - \dfrac{5}{2} + 2 = \dfrac{25 - 40 + 32}{16} = \dfrac{17}{16}$.

Question 2. Pour tout n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = u_n^2 - 2u_n + 2 - 1 = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 = v_n^2.$$

Question 3. Résultat admis : $0 < v_n \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout n.

Question 4. On a $v_{n+1} - v_n = v_n^2 - v_n = v_n(v_n - 1)$. Comme $v_n > 0$ et $v_n \leq \frac{1}{2} < 1$, on a $v_n - 1 < 0$ donc $v_{n+1} - v_n < 0$: (v_n) est décroissante.
Or $u_n = v_n + 1$, donc $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n < 0$: (u_n) est décroissante. De plus $u_n = 1 + v_n > 1$: (u_n) est minorée par 1.

Question 5. $v_0 = u_0 - 1 = \dfrac{1}{2}$, $v_1 = v_0^2 = \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, $v_2 = v_1^2 = \dfrac{1}{16} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$. Les exposants $1, 2, 4$ sont les puissances de 2 : on conjecture

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}, \qquad \text{donc} \qquad u_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

Cette formule est cohérente avec la relation $v_{n+1} = v_n^2$: si $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$, alors $v_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n \times 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$ (on admet la formule pour tout n).

Question 6. La fonction `u(n)` calcule u_n en appliquant n fois la relation de récurrence. La boucle `while` augmente n tant que $u_n - 1 = v_n \geq 10^{-10}$: elle s'arrête au *premier* rang tel que $v_n < 10^{-10}$. D'après la question 5, $v_5 = 2^{-32} \approx 2{,}3 \times 10^{-10} \geq 10^{-10}$ mais $v_6 = 2^{-64} \approx 5{,}4 \times 10^{-20} < 10^{-10}$.

Affichage obtenu : `6 1.0`
Le programme affiche $n = 6$. La valeur « 1.0 » vient de l'arrondi des flottants : $u_6 = 1 + 2^{-64}$ n'est pas représentable exactement. La suite (u_n) converge donc extrêmement vite vers 1 (le nombre de décimales exactes double à chaque étape).

Correction de l'exercice 2 — Suite et télescopage

Question 1. $u_1 = 1 + \dfrac{1}{1 \times 2} = \dfrac{3}{2}$ et $u_2 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2 \times 3} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$.

Question 2. On réduit au même dénominateur :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Question 3. On a $v_{n+1} = u_{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$. En remplaçant u_{n+1} et en utilisant la question 2 :

$$v_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} = u_n + \frac{1}{n+1} = v_n.$$

La suite (v_n) est donc constante, égale à $v_0 = u_0 + \dfrac{1}{1} = 2$: $v_n = 2$ pour tout n.

Question 4. Comme $v_n = u_n + \frac{1}{n+1} = 2$, on obtient $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1}$. Vérification : $u_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ et $u_2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$.

Question 5. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$: (u_n) est croissante. Comme $\dfrac{1}{n+1} > 0$, on a $u_n = 2 - \dfrac{1}{n+1} < 2$ pour tout n.

Question 6. Le programme ajoute successivement les termes $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et s'arrête dès que $u_n > 1{,}97$. Or

$$2 - \frac{1}{n+1} > 1{,}97 \iff \frac{1}{n+1} < 0{,}03 \iff n+1 > \frac{100}{3} \approx 33{,}3 \iff n \geq 33.$$

Affichage obtenu : `33 1.9705882352941173`
Le plus petit rang est $n = 33$: $u_{33} = 2 - \frac{1}{34} \approx 1{,}9706$, alors que $u_{32} = 2 - \frac{1}{33} \approx 1{,}9697 < 1{,}97$.

Correction de l'exercice 3 — Suites adjacentes

Question 1. $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$: (a_n) est croissante.

Question 2. On a $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} - a_n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$. Avec le dénominateur commun $n(n+1)^2$:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Cette quantité est strictement négative : (b_n) est décroissante.

Question 3. $d_n = b_n - a_n = \dfrac{1}{n}$. Elle est strictement positive, donc $a_n < b_n$, et elle se rapproche de 0 quand n devient grand ($d_{100} = 0{,}01$, $d_{1000} = 0{,}001$, …).

Question 4. Par la question 3, $a_n \leq b_n$. Comme (b_n) est décroissante, $b_n \leq b_1 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2$. Ainsi $a_n \leq b_n \leq 2$.
Conséquence : (a_n) est croissante et majorée par 2, (b_n) est décroissante et minorée par $a_1 = 1$, et $b_n - a_n \to 0$: les suites sont *adjacentes*, donc elles ont une même limite L qui vérifie $a_n \leq L \leq b_n$ pour tout n.

Question 5. Le programme calcule a_n et $b_n = a_n + \frac{1}{n}$, et s'arrête au premier n tel que $d_n = \frac{1}{n} < 0{,}01$, c'est-à-dire $n > 100$: $n = 101$ (pour $n = 100$, $\frac{1}{100} = 0{,}01$ n'est pas strictement inférieur à 0,01).

Affichage obtenu : `101 1.635081929789833 1.6449829198888428 True`
On obtient l'encadrement $1{,}6350 \leq a_{101} \leq L \leq b_{101} \leq 1{,}6450$, d'amplitude $< 0{,}01$. Le nombre $\frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$ appartient bien à $[a_{101}; b_{101}]$: le dernier affichage est `True`.

Correction de l'exercice 4 — Approcher $\sqrt{2}$ (méthode de Héron)

Question 1. Résultat admis : $u_n > 0$ pour tout n.

Question 2. On réduit au même dénominateur :

$$v_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} = \frac{v_n^2}{2u_n}.$$

Comme $u_n > 0$, on a $v_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. De plus $v_0 = 2 - \sqrt{2} > 0$. Donc $v_n \geq 0$ pour tout n, c'est-à-dire $u_n \geq \sqrt{2}$.

Question 3. $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{2}+\dfrac{1}{u_n}-u_n=-\dfrac{u_n}{2}+\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{2-u_n^2}{2u_n}$. Comme $u_n\geq\sqrt{2}>0$, on a $u_n^2\geq 2$, donc le numérateur est ≤ 0 et le dénominateur est >0 : $u_{n+1}-u_n\leq 0$. La suite (u_n) est décroissante.

Question 4. (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$: ses termes se rapprochent d'un réel $\ell\geq\sqrt{2}$ (on le conjecture égal à $\sqrt{2}$: en passant à la limite dans la relation de récurrence, $\ell=\frac{\ell}{2}+\frac{1}{\ell}$ donne $\ell^2=2$). Comme $u_n\geq\sqrt{2}$ pour tout n, u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ *par excès*.

Question 5. Le programme s'arrête dès que $|u_n^2-2|\leq 10^{-12}$. Les premiers termes sont $u_0=2$ ($u_0^2-2=2$), $u_1=\frac{3}{2}$ (0,25), $u_2=\frac{17}{12}$ ($\approx 7\times10^{-3}$), $u_3=\frac{577}{408}$ ($\approx 6\times10^{-6}$), $u_4=\frac{665857}{470832}$ ($\approx 4{,}5\times10^{-12}>10^{-12}$), puis u_5 (écart de l'ordre de 10^{-16}).

Affichage obtenu : `5 1.414213562373095`
Il faut donc $n=5$ itérations. Le nombre de chiffres exacts double à peu près à chaque étape, ce que traduit la relation $v_{n+1}=\frac{v_n^2}{2u_n}$: l'erreur est élevée au carré.

Correction de l'exercice 5 — Une suite de racines emboîtées

Question 1. $u_1=\sqrt{2+0}=\sqrt{2}$ et $u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 1{,}848$.

Question 2. Résultat admis : $0\leq u_n<2$. On en déduit $v_n=2-u_n>0$.

Question 3. On multiplie et divise par la quantité conjuguée $2+u_{n+1}$:

$$v_{n+1}=2-u_{n+1}=\frac{(2-u_{n+1})(2+u_{n+1})}{2+u_{n+1}}=\frac{4-u_{n+1}^2}{2+u_{n+1}}=\frac{4-(2+u_n)}{2+u_{n+1}}=\frac{2-u_n}{2+u_{n+1}}=\frac{v_n}{2+u_{n+1}}.$$

Comme $u_{n+1}\geq 0$, on a $2+u_{n+1}\geq 2$, d'où $\dfrac{1}{2+u_{n+1}}\leq\dfrac{1}{2}$. Avec $v_n>0$: $0<v_{n+1}\leq\dfrac{v_n}{2}$.

Question 4. Puisque $v_n>0$, $v_{n+1}\leq\frac{v_n}{2}<v_n$: (v_n) est décroissante. Comme $u_n=2-v_n$, on a $u_{n+1}-u_n=v_n-v_{n+1}>0$: (u_n) est croissante.

Question 5. Résultat admis : $v_n\leq\dfrac{2}{2^n}$ (on a $v_0=2$, puis chaque étape divise la borne par 2).

Question 6. Le programme s'arrête au premier n tel que $2-u_n<10^{-6}$.

Affichage obtenu : `11 1.9999994117257645`
On obtient $n=11$. La question 5 donne seulement $v_{11}\leq\frac{2}{2^{11}}\approx 9{,}8\times10^{-4}$: cette garantie est bien plus faible que le résultat réel ($v_{11}\approx 5{,}9\times10^{-7}$). En effet $2+u_{n+1}$ est proche de 4, donc l'erreur est en réalité divisée par 4 à chaque étape ($v_n\approx 2\times 4^{-n}$). Pour *garantir* 10^{-6} avec la seule majoration $\frac{2}{2^n}$, il faudrait $2^n>2\times10^6$, soit $n\geq 21$.

Correction de l'exercice 6 — Divergence par minoration

Question 1. Résultat admis : $u_n>0$ pour tout n.

Question 2. $v_{n+1}-v_n=\big(u_{n+1}-(n+1)\big)-(u_n-n)=u_{n+1}-u_n-1=\left(u_n+1+\dfrac{1}{u_n}\right)-u_n-1=\dfrac{1}{u_n}$.
Comme $u_n>0$, $v_{n+1}-v_n>0$: (v_n) est croissante.

Question 3. (v_n) étant croissante, $v_n\geq v_0=u_0-0=1$, soit $u_n-n\geq 1$, c'est-à-dire $u_n\geq n+1$.

Question 4. Soit A un réel. Pour tout entier $n\geq A$ (et $n\geq 0$), on a $u_n\geq n+1>n\geq A$. Donc à partir d'un certain rang, $u_n>A$: la suite (u_n) dépasse n'importe quel réel, elle *diverge vers* $+\infty$.

Question 5. Le programme s'arrête au premier n tel que $u_n>100$.

Affichage obtenu : `95 100.38192396929074`
C'est cohérent avec la question 3 : $u_n\geq n+1$ garantit $u_n>100$ *au plus tard* pour $n=100$; le programme trouve $n=95\leq 100$. Il n'y a pas de contradiction car $u_n=n+v_n$ où v_n continue de croître (ici $v_{95}\approx 5{,}38$) : la minoration $v_n\geq 1$ est simplement une borne grossière.

Correction de l'exercice 7 — Une somme avec une suite auxiliaire cubique

Question 1. $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = S_n + (n+1)(n+2)$.

Question 2. On factorise :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} - \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)}{3}\big[(n+3) - n\big] = (n+1)(n+2).$$

Question 3. $w_{n+1} - w_n = (S_{n+1} - S_n) - (v_{n+1} - v_n) = (n+1)(n+2) - (n+1)(n+2) = 0$. La suite (w_n) est constante, égale à $w_0 = S_0 - v_0 = 0 - 0 = 0$. Donc $S_n = v_n$:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Question 4. $S_{20} = \dfrac{20 \times 21 \times 22}{3} = \dfrac{9240}{3} = 3080$.

Question 5. `S(n)` calcule la somme terme à terme ; `v(n)` applique la formule trouvée (la division entière `//` est exacte, car le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 3).

Affichage obtenu : `343400 343400 / True`
Pour $n = 100$: $\frac{100\times101\times102}{3} = 343\,400$. Le test final vérifie que $S(n) = v(n)$ pour tous les entiers de 0 à 200 : c'est un contrôle numérique de la formule, qui n'a pas valeur de démonstration (celle-ci est faite à la question 3 pour *tout* n).

Correction de l'exercice 8 — Quotients de termes consécutifs de la suite de Fibonacci

Question 1. $F_2 = F_1 + F_0 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$. Puis $r_0 = \dfrac{F_1}{F_0} = 1$, $r_1 = \dfrac{2}{1} = 2$, $r_2 = \dfrac{3}{2}$, $r_3 = \dfrac{5}{3}$, $r_4 = \dfrac{8}{5}$.

Question 2. Résultat admis : $F_n > 0$ (donc les quotients sont bien définis). Alors

$$r_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{r_n}.$$

Question 3. Résultat admis : $1 \leq r_n \leq 2$ pour tout n (en effet, si $1 \leq r_n \leq 2$, alors $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{r_n} \leq 1$ donc $\frac{3}{2} \leq r_{n+1} \leq 2$).

Question 4. Si $\varphi > 0$ vérifie $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$, en multipliant par $\varphi \neq 0$: $\varphi^2 = \varphi + 1$, soit $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$; les racines sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Seule la racine positive convient :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$$

Question 5. Dans le programme, `a` et `b` représentent F_n et F_{n+1} ; l'instruction `a, b = b, a + b` fait passer de (F_n, F_{n+1}) à (F_{n+1}, F_{n+2}). Ainsi `b/a` vaut r_n et le programme s'arrête au premier rang où $|r_n - \varphi| < 10^{-6}$.

Affichage obtenu : `15 1.618034447821682`
On a $r_{15} = \dfrac{F_{16}}{F_{15}} = \dfrac{1597}{987} \approx 1{,}6180344$ avec $|r_{15} - \varphi| \approx 4{,}6 \times 10^{-7} < 10^{-6}$, alors que $r_{14} = \frac{987}{610} \approx 1{,}618033$ donne un écart $\approx 1{,}2 \times 10^{-6} \geq 10^{-6}$. Le rang cherché est $n = 15$. On remarque que les r_n sont alternativement inférieurs et supérieurs à φ ($r_3 \approx 1{,}667 > \varphi > r_4 = 1{,}6$).

Correction de l'exercice 9 — Une suite périodique

Question 1. $u_1 = \dfrac{1}{1-2} = -1$, $u_2 = \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, $u_4 = \dfrac{1}{1-2} = -1$. On remarque que $u_3 = u_0$ et $u_4 = u_1$: les valeurs 2, -1, $\frac{1}{2}$ se répètent.

Question 2. Supposons $u_n \notin \{0, 1\}$. Alors

$$u_{n+2} = \frac{1}{1-u_{n+1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-u_n}} = \frac{1}{\frac{(1-u_n)-1}{1-u_n}} = \frac{1-u_n}{-u_n} = \frac{u_n-1}{u_n}.$$

Puis

$$u_{n+3} = \frac{1}{1-u_{n+2}} = \frac{1}{1-\frac{u_n-1}{u_n}} = \frac{1}{\frac{u_n-(u_n-1)}{u_n}} = \frac{1}{\frac{1}{u_n}} = u_n.$$

Les termes $2, -1, \frac{1}{2}$ ne valent ni 0 ni 1, donc la suite est bien définie et $u_{n+3} = u_n$ pour tout n : la suite est *périodique de période* 3.

Question 3. $w_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} = u_{n+1} + u_{n+2} + u_n = w_n$ (car $u_{n+3} = u_n$). La suite (w_n) est constante, égale à $w_0 = 2 - 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Question 4. La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2024} u_k$ contient $2025 = 3 \times 675$ termes. On les regroupe par blocs de trois termes consécutifs : $(u_0 + u_1 + u_2) + (u_3 + u_4 + u_5) + \dots$, chaque bloc valant $w_{3j} = \dfrac{3}{2}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{2024} u_k = 675 \times \frac{3}{2} = \frac{2025}{2} = 1012{,}5.$$

Comme $2025 = 3 \times 675$ et que la suite est 3-périodique, $u_{2025} = u_0 = 2$.

Question 5. Le programme ajoute u à `s` *avant* de passer au terme suivant : après la boucle, `s` vaut $u_0 + \dots + u_{2024}$ et `u` vaut u_{2025}. L'utilisation de `Fraction` évite toute erreur d'arrondi.

Affichage obtenu : `2025/2 2`
Ce résultat est identique à celui de la question 4.

Correction de l'exercice 10 — Régions du plan

Question 1. $R_1 = R_0 + 1 = 2$; $R_2 = R_1 + 2 = 4$; $R_3 = R_2 + 3 = 7$. Schéma : une droite coupe le plan en 2 régions ; deux droites sécantes en 4 ; trois droites formant un triangle en 7 (le triangle central, 3 régions adjacentes aux côtés et 3 régions aux sommets).

Question 2. Comme $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$, on a

$$v_{n+1} = R_{n+1} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = R_n + n + 1 - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = R_n - \frac{n(n+1)}{2} = v_n.$$

La suite (v_n) est constante, égale à $v_0 = R_0 - 0 = 1$.

Question 3. $R_n - \dfrac{n(n+1)}{2} = 1$, donc $R_n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$. Vérification : $R_3 = 1 + 6 = 7$.

Question 4. $R_{10} = 1 + \dfrac{10 \times 11}{2} = 56$.

Question 5. Le programme ajoute n à `R` à chaque étape (donc `R` vaut R_n) et s'arrête au premier n tel que $R_n > 1000$.

Affichage obtenu : `45 1036`

Par le calcul : $R_n > 1000 \iff \dfrac{n(n+1)}{2} > 999 \iff n(n+1) > 1998$. Or $44 \times 45 = 1980 \leq 1998$ (et $R_{44} = 991$), tandis que $45 \times 46 = 2070 > 1998$ (et $R_{45} = 1036$). Il faut donc $n = 45$ droites.