Corrections détaillées

Sens de variation d'une suite

Méthodes $u_{n+1}-u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Partie A – Méthode $u_{n+1}-u_n$

Correction de la question 1

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2(n+1)^2+3(n+1)-1=2n^2+4n+2+3n+3-1=2n^2+7n+4$. Donc

$$u_{n+1}-u_n=(2n^2+7n+4)-(2n^2+3n-1)=4n+5.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $4n+5\geqslant 5>0$.

Conclusion. $u_{n+1}-u_n>0$ pour tout n, donc (u_n) est strictement croissante.

Correction de la question 2

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=\dfrac{2(n+1)+3}{(n+1)+1}=\dfrac{2n+5}{n+2}$. Ainsi

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2n+5}{n+2}-\frac{2n+3}{n+1}=\frac{(2n+5)(n+1)-(2n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)}.$$

On développe : $(2n+5)(n+1)=2n^2+7n+5$ et $(2n+3)(n+2)=2n^2+7n+6$. Le numérateur vaut donc -1 et

$$v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)>0$, donc cette différence est strictement négative.

Conclusion. (v_n) est strictement décroissante.

Correction de la question 3

a) $w_{n+1}=(n+1)^2-6(n+1)+2=n^2+2n+1-6n-6+2=n^2-4n-3$. Donc

$$w_{n+1}-w_n=(n^2-4n-3)-(n^2-6n+2)=2n-5.$$

b) $2n-5\geqslant 0 \iff n\geqslant 2{,}5$. Comme n est entier :

- pour $n\in\{0;1;2\}$, $2n-5<0$;
- pour $n\geqslant 3$, $2n-5\geqslant 1>0$.

c) D'après b), $w_1<w_0$, $w_2<w_1$ et $w_3<w_2$: la suite décroît au début. En revanche, pour $n\geqslant 3$, $w_{n+1}>w_n$: elle croît ensuite. On vérifie avec les premiers termes : $w_0=2$, $w_1=-3$, $w_2=-6$, $w_3=-7$, $w_4=-6$.

Conclusion. (w_n) n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$ (car $w_0>w_1$ et $w_3<w_4$), mais elle est strictement croissante à partir du rang 3. Son minimum est $w_3=-7$.

Partie B – Méthode $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Correction de la question 4

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+1} > 0$ et $2^n > 0$, donc $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n} > 0$.

b) $a_{n+1} = \dfrac{3^{n+2}}{2^{n+1}}$, donc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} \times \frac{2^n}{2^{n+1}} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Comme $a_n > 0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3}{2} > 1$, on a $a_{n+1} > a_n$.

Conclusion. (a_n) est strictement croissante. (C'est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $a_0 = 3 > 0$.)

Correction de la question 5

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$ et $b_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+2}$. Donc

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

b) On calcule

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} - 1 = \frac{2(n+1) - (n+2)}{n+2} = \frac{2n+2-n-2}{n+2} = \frac{n}{n+2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n+2} \geqslant 0$, donc $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \geqslant 1$, et comme $b_n > 0$: $b_{n+1} \geqslant b_n$.

c) $b_0 = \dfrac{2^0}{1} = 1$ et $b_1 = \dfrac{2^1}{2} = 1$.

Conclusion. (b_n) est croissante. Elle n'est pas strictement croissante puisque $b_0 = b_1$ (le quotient vaut exactement 1 pour $n = 0$). En revanche, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{n}{n+2} > 0$: la croissance est stricte à partir du rang 1.

Correction de la question 6

a) Pour $n \geqslant 1$, $c_n > 0$ et $c_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$. Donc

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n}.$$

b) Pour $n \geqslant 1$ on a $2n > 0$, donc

$$\frac{n+1}{2n} \leqslant 1 \iff n+1 \leqslant 2n \iff 1 \leqslant n.$$

L'inégalité est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$ (avec égalité uniquement pour $n = 1$).

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant 1$ et $c_n > 0$, donc $c_{n+1} \leqslant c_n$.

Conclusion. (c_n) est décroissante. Vérification : $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{3}{8}$, $c_4 = \frac{1}{4}$. Elle est strictement décroissante à partir du rang 2.

Partie C – Suites définies par récurrence

Correction de la question 7

D'après la relation de récurrence, $u_{n+1} = u_n - n^2 - 2$, donc

$$u_{n+1} - u_n = -n^2 - 2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geqslant 0$ donc $-n^2 - 2 \leqslant -2 < 0$.

Conclusion. $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n, donc (u_n) est strictement décroissante. (On n'a pas eu besoin de connaître u_n : la différence ne dépend que de n.)

Correction de la question 8

a) $v_1 = v_0 - v_0^2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$ et $v_2 = v_1 - v_1^2 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{16}$.

b) D'après la relation de récurrence,

$$v_{n+1} - v_n = (v_n - v_n^2) - v_n = -v_n^2.$$

Un carré est toujours positif ou nul, donc $-v_n^2 \leqslant 0$ pour tout n, quelle que soit la valeur de v_n.

Conclusion. $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$ pour tout n, donc (v_n) est décroissante.

Correction de la question 9

a) On applique la relation de récurrence avec $n = 0$, 1 puis 2 :

$$t_1 = \frac{0+3}{2\times 1}\, t_0 = \frac{3}{2}, \qquad t_2 = \frac{1+3}{2\times 2}\, t_1 = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \qquad t_3 = \frac{2+3}{2\times 3}\, t_2 = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}.$$

b) Les termes étant strictement positifs, on peut diviser par t_n :

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{n+3}{2(n+1)}.$$

c) Comme $2(n+1) > 0$,

$$\frac{n+3}{2(n+1)} \leqslant 1 \iff n+3 \leqslant 2n+2 \iff 1 \leqslant n.$$

Donc $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} \leqslant 1$ si et seulement si $n \geqslant 1$.

d) Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} \leqslant 1$ et $t_n > 0$, donc $t_{n+1} \leqslant t_n$: la suite est décroissante à partir du rang 1. En revanche, pour $n = 0$, $\dfrac{t_1}{t_0} = \dfrac{3}{2} > 1$, soit $t_0 = 1 < t_1 = \dfrac{3}{2}$.

Conclusion. (t_n) est décroissante à partir du rang 1, mais pas dès le rang 0 : elle n'est donc pas décroissante sur $\mathbb{N}$.

Correction de la question 10

a) Une augmentation de 3 % revient à multiplier par $1 + \dfrac{3}{100} = 1{,}03$. Donc $C_{n+1} = 1{,}03\,C_n$: la suite (C_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme $C_0 = 2\,000$, d'où $C_n = 2\,000 \times 1{,}03^n$. En particulier $C_n > 0$ pour tout n.

b) Méthode par différence :

$$C_{n+1} - C_n = 1{,}03\,C_n - C_n = 0{,}03\,C_n.$$

Comme $C_n > 0$, on a $C_{n+1} - C_n > 0$: la suite est strictement croissante.

c) Méthode par quotient : $C_n > 0$ et $\dfrac{C_{n+1}}{C_n} = 1{,}03 > 1$, donc $C_{n+1} > C_n$. On retrouve que (C_n) est strictement croissante.

d) On cherche le plus petit n tel que $2\,000 \times 1{,}03^n > 2\,500$, c'est-à-dire $1{,}03^n > 1{,}25$. À la calculatrice :

$$C_7 \approx 2\,459{,}75 \text{ €} \quad (\leqslant 2\,500), \qquad C_8 \approx 2\,533{,}54 \text{ €} \quad (> 2\,500).$$

Comme la suite est croissante, elle reste au-dessus de 2 500 à partir du rang 8.

Conclusion. Le capital dépasse 2 500 € au bout de 8 ans ($n = 8$).