Fiche d'exercices

Sens de variation d'une suite

Méthodes $u_{n+1}-u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ – suites explicites et suites définies par récurrence

Rappels de méthode

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \geqslant n_0$.

- **Méthode par différence.** On étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$:
  - si $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors (u_n) est croissante ;
  - si $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors (u_n) est décroissante.
- **Méthode par quotient** (*uniquement si tous les termes sont strictement positifs*). On compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :
  - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors (u_n) est croissante ;
  - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant n_0$, alors (u_n) est décroissante.
- Si les inégalités sont strictes, la suite est *strictement* croissante ou décroissante.

Partie A – Suites explicites : méthode $u_{n+1}-u_n$

Question 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2+3n-1$.
Calculer $u_{n+1}-u_n$, puis en déduire le sens de variation de (u_n).

Question 2

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$.
Montrer que $v_{n+1}-v_n = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, puis déterminer le sens de variation de (v_n).

Question 3

Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = n^2-6n+2$.

a) Montrer que $w_{n+1}-w_n = 2n-5$.

b) Étudier le signe de $2n-5$ selon les valeurs de n.

c) En déduire que (w_n) n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$, mais qu'elle est croissante à partir d'un certain rang que l'on précisera.

Partie B – Suites explicites : méthode $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Question 4

Soit (a_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$.

a) Justifier que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ et en déduire le sens de variation de (a_n).

Question 5

Soit (b_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = \dfrac{2^n}{n+1}$.

a) Montrer que $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{2(n+1)}{n+2}$.

b) Montrer que $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} - 1 = \dfrac{n}{n+2}$, puis conclure sur le sens de variation de (b_n).

c) Calculer b_0 et b_1. La suite est-elle strictement croissante ?

Question 6

Soit (c_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $c_n = \dfrac{n}{2^n}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{n+1}{2n}$.

b) Résoudre l'inéquation $\dfrac{n+1}{2n} \leqslant 1$ pour $n \geqslant 1$.

c) En déduire le sens de variation de (c_n).

Partie C – Suites définies par récurrence

Question 7

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - n^2 - 2$.
Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n et en déduire le sens de variation de (u_n).

Question 8

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - v_n^2$.

a) Calculer v_1 et v_2.

b) Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de v_n et en déduire le sens de variation de (v_n).

Question 9

Soit (t_n) la suite définie par $t_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \dfrac{n+3}{2(n+1)}\, t_n$.
On admet que tous les termes de la suite sont strictement positifs.

a) Calculer t_1, t_2 et t_3.

b) Exprimer $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ en fonction de n.

c) Montrer que $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} \leqslant 1$ si et seulement si $n \geqslant 1$.

d) En déduire que (t_n) est décroissante à partir du rang 1. Est-elle décroissante dès le rang 0 ?

Question 10

Problème de synthèse. Un capital de 2 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. On note C_n le capital (en euros) disponible au bout de n années, de sorte que $C_0 = 2\,000$.

a) Justifier que $C_{n+1} = 1{,}03\, C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $C_n = 2\,000 \times 1{,}03^{\,n}$.

b) *Méthode par différence* : exprimer $C_{n+1} - C_n$ en fonction de C_n et en déduire le sens de variation de (C_n).

c) *Méthode par quotient* : retrouver le même résultat en calculant $\dfrac{C_{n+1}}{C_n}$.

d) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $C_n > 2\,500$.