

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

1) DÉFINITION

Définition :

Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω , fait correspondre un nombre réel x .
- L'événement de Ω , noté $[X = x]$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X .
- $X(\Omega)$, l'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X . Cet ensemble est noté Ω' .

Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.

En général, une variable aléatoire est notée $X, Y, Z \dots$

Exemple : Pour tout le chapitre

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

L'univers de cette expérience aléatoire est : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

On peut, par exemple, définir une variable aléatoire X de la façon suivante :

- $X = 0$ si le nombre est pair
- $X = 1$ si le nombre est impair

L'ensemble image de Ω par X est $X(\Omega) = \Omega' = \{0; 1\}$

On a $[X=0] = \{2; 4; 6\}$ et $[X=1] = \{1; 3; 5\}$

Remarque : On note $[X \geq a]$, l'événement « la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à a », c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω qui ont une image supérieure ou égale à a par X . On définit de même $[X \leq a]$, $[X > a]$ et $[X < a]$.

2) LOI DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE (on dit aussi loi image de la variable aléatoire)

Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.

$\Omega' = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X .

La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω' , qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p_i' = P(X = x_i)$

On démontre facilement que

$$\sum_{i=1}^m P(X = x_i) = 1$$

Exemple :

La loi de probabilité de la variable aléatoire définie ci-dessus est :

x_i	0	1
$p_i' = P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3) ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART TYPE

Si les issues d'une expérience aléatoire sont des nombres réels, on peut définir les nombres ci-dessous :

Définition :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité. On note p_i la probabilité de l'éventualité ω_i .

- L'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre μ défini par : $\mu = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i$
- La variance** de la loi de probabilité est le nombre V défini par : $V = \sum_{i=1}^n p_i (\omega_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 - \mu^2$
- L'écart type** de la loi de probabilité est le nombre σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

Preuve : formule de la variance

$$V = \sum_{i=1}^n p_i (\omega_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (p_i \omega_i^2 - 2 p_i \omega_i \mu + p_i \mu^2) = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 - 2 \mu \sum_{i=1}^n p_i \omega_i + \mu^2 \sum_{i=1}^n p_i$$

$$\text{Or } \mu = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$$\text{On en déduit que } V = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 - 2 \mu^2 + \mu^2 = \sum_{i=1}^n p_i \omega_i^2 - \mu^2$$

Définition :

L'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire X sont respectivement l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la loi de probabilité de X définie sur Ω .

Les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

$$E(X) = \sum_{i=1}^m P(X = x_i) x_i$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^m P(X = x_i) x_i^2 - E(X)^2$$

Formule de König-Huygen

Exemple :

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad V(X) = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{et } \sigma(X) = \frac{1}{2}$$

Remarques :

- On peut interpréter l'espérance comme étant la valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions ou encore comme étant la valeur que l'on peut espérer obtenir.

- Si la variable aléatoire X désigne le gain d'un jeu, on dit que ce jeu est équitable lorsque $E(X)=0$.

- Comme en statistique descriptive, l'écart type mesure la dispersion. Plus l'écart type est faible, plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance.

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On a :

$$E(aX + b) = a E(X) + b \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Preuve :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.

$\Omega' = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

$$\text{On a alors } E(X) = \sum_{i=1}^m p_i' x_i \text{ et } V(X) = \sum_{i=1}^m p_i' x_i^2 - E(X)^2$$

$$\bullet \quad E(aX + b) = \sum_{i=1}^m p_i' (a x_i + b) = \sum_{i=1}^m (a p_i' x_i + b p_i') = \sum_{i=1}^m a p_i' x_i + \sum_{i=1}^m b p_i' = a \sum_{i=1}^m p_i' x_i + b \sum_{i=1}^m p_i'$$

$$\text{Or } E(X) = \sum_{i=1}^m p_i' x_i \text{ et } \sum_{i=1}^m p_i' = 1. \text{ On en déduit que } E(aX + b) = a E(X) + b$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad V(aX + b) &= \sum_{i=1}^m p_i' (a x_i + b)^2 - E(aX + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m p_i' (a^2 x_i^2 + 2 a b x_i + b^2) - (a E(X) + b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m (p_i' a^2 x_i^2 + p_i' 2 a b x_i + p_i' b^2) - (a^2 E(X)^2 + 2 a b E(X) + b^2) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^m p_i' x_i^2 + 2 a b \sum_{i=1}^m p_i' x_i + b^2 \sum_{i=1}^m p_i' - a^2 E(X)^2 - 2 a b E(X) - b^2 \end{aligned}$$

$$\text{Or } 2 a b \sum_{i=1}^m p_i' x_i = 2 a b E(X) \text{ et } b^2 \sum_{i=1}^m p_i' = b^2 \times 1 = b^2 \text{ Ainsi } V(aX + b) = a^2 \left(\sum_{i=1}^m p_i' x_i^2 - E(X)^2 \right) + 2 a b E(X) + b^2 - 2 a b E(X) - b^2 = a^2 V(X)$$

Remarque :

Dans toutes les situations étudiées jusqu'à présent, la variable aléatoire X prend un nombre fini de valeurs. On dit que X est **discrète**.