

TRIANGLES ISOMETRIQUES - TRIANGLES SEMBLABLES

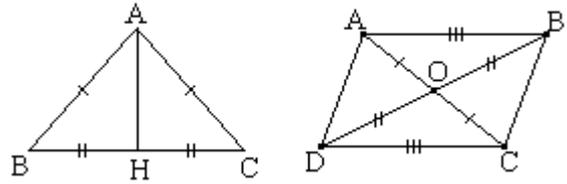
1) TRIANGLES ISOMETRIQUES

A) DEFINITION

Dire que deux triangles sont **isométriques** signifie que leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

Ex :

- ABC est un triangle isocèle en A, H le milieu de [BC].
Alors ABH et ACH sont isométriques.
- ABCD est un parallélogramme de centre O.
Alors OAB et OCD sont isométriques.



Rem :

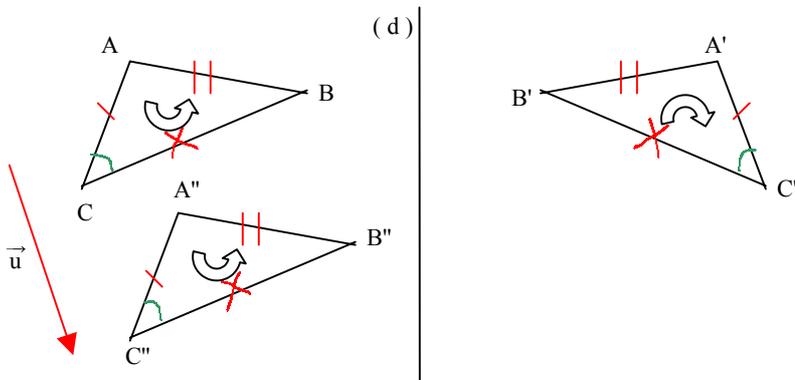
- Deux triangles sont isométriques si, et seulement si, l'un est l'image de l'autre par une symétrie axiale, une symétrie centrale, une translation, une rotation ou une succession de telles transformations. (... c'est à dire par une isométrie)
- Si deux triangles sont isométriques, alors ils sont superposables.
- Si deux triangles sont isométriques alors ils ont la même aire.

Vocabulaire

Soit ABC et A'B'C' deux triangles isométriques.

La symétrie axiale d'axe (d), transforme ABC en A'B'C'.

La translation de vecteur \vec{u} transforme ABC en A''B''C''.



- On a $AB = A'B'$.
Les côtés [AB] et [A'B'] se correspondent, on dit que ce sont des côtés **homologues**.
- On a $\hat{A} = \hat{A}'$.
Les angles A et A' sont dits **homologues**.
- ABC et A'B'C' sont **indirectement isométriques**.
- ABC et A''B''C'' sont **directement isométriques**.
- A'B'C' et A''B''C'' sont **indirectement isométriques**.

Attention à l'ordre des points !

B) PROPRIETE

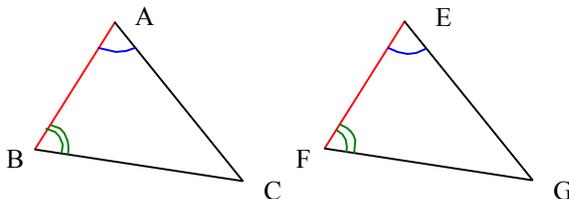
Une isométrie conserve les angles géométriques . On en déduit la propriété suivante.

Lorsque deux triangles sont isométriques, leurs angles sont égaux deux à deux.

La réciproque est fausse.

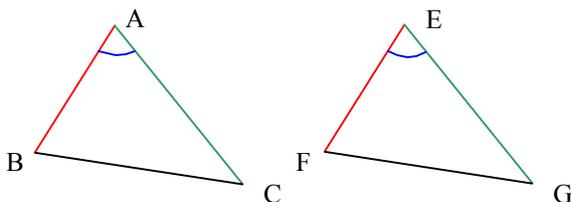
C) CARACTERISATION DES TRIANGLES ISOMETRIQUES

Si deux triangles ont un côté de même longueur, adjacent à deux angles respectivement de même mesure, alors les deux triangles sont isométriques.



$$\text{Si } \begin{cases} AB = EF \\ \widehat{CBA} = \widehat{GFE} \\ \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \end{cases}, \text{ alors ABC et EFG sont isométriques.}$$

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors les deux triangles sont isométriques.



$$\text{Si } \begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{FEG} \\ AB = EF \\ AC = EG \end{cases}, \text{ alors ABC et EFG sont isométriques.}$$

2) TRIANGLES SEMBLABLES

A) DEFINITION

Deux triangles sont **semblables** (on dit aussi qu'ils ont la même forme), si leurs angles sont égaux deux à deux.

Rem :

Deux triangles isométriques sont des triangles semblables puisque leurs angles sont égaux deux à deux. Mais des triangles semblables ne sont pas nécessairement isométriques.

B) PROPRIETE

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° . On en déduit la propriété suivante :

Si deux triangles ont deux angles respectivement égaux, alors ils sont semblables.

C) PROPORTIONNALITE

Si deux triangles sont semblables, alors les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.

Si on sait que ABC et MNP sont semblables avec $\hat{A} = \hat{M}$, $\hat{B} = \hat{N}$ et $\hat{C} = \hat{P}$, alors $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = k$.

On dit que les côtés de ABC sont proportionnels aux côtés de MNP.

Le rapport k est appelé coefficient d'agrandissement ou de réduction, on parle aussi de rapport de similitude.

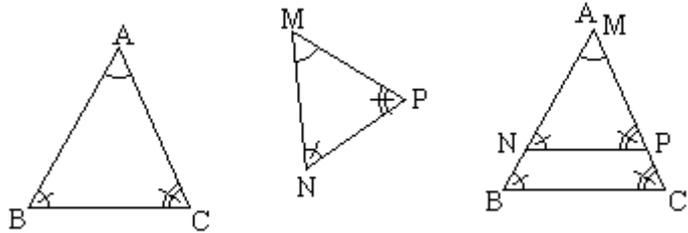
Preuve :

On reprend les notations de l'exemple, et on suppose de plus que $MN < AB$.

Puisque $\hat{A} = \hat{M}$, on peut déplacer le triangle MNP sur ABC de façon que M soit en A, et N entre A et B.

Les angles correspondants \hat{N} et \hat{B} sont égaux, donc les droites (NP) et (BC) sont parallèles. On retrouve une configuration de Thalès ... donc les côtés des triangles ABC et MNP sont proportionnels et

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC}$$



Réciproquement :

Si deux triangles ont leurs côtés respectivement proportionnels alors ces triangles sont semblables.

Rem :

- Si ABC et MNP sont deux triangles semblables et si k est le coefficient d'agrandissement réduction, qui transforme ABC en MNP, alors : $\text{aire}(MNP) = k^2 \text{aire}(ABC)$.
- On a le même vocabulaire que pour les triangles isométriques, côtés et angles homologues.

D) UNE AUTRE CARACTERISATION DES TRIANGLES SEMBLABLES

Si deux triangles sont tels qu'un angle de l'un est égal à un angle de l'autre et que le rapport des deux côtés adjacents à cet angle est égal au rapport des côtés homologues alors ils sont semblables.

E) TRIANGLES SEMBLABLES PARTICULIERS

- Tous les triangles équilatéraux sont semblables.
- Tous les triangles rectangles isocèles sont semblables.