FONCTIONS AFFINES

1) DÉFINITION

Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \longmapsto ax+b$ où a et b sont des réels fixés.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 3x-2$ est une fonction affine.

Cas particuliers :

- Si $b=0$, on dit que la fonction est **linéaire.**
- Si $a=0$, la fonction est du type $f : x \longmapsto b$ où b est un réel fixé, elle est donc **constante**.

2) PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 3x-2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10

Ce tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité car le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ n'est pas constant, la fonction f n'est donc pas linéaire.

Par contre, si on considère le rapport $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}$ pour deux valeurs distinctes quelconques u et v, on constate qu'il semble être constant.

Dans l'exemple, on obtient toujours $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}=3$

On dit que f est une fonction à **accroissement linéaire** .

Propriété :

Une fonction f est une fonction affine si, et seulement si , pour tous réels distincts u et v , on a :

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=a$$

Ce qui revient à dire que l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable et que le coefficient de proportionnalité est a.

Preuve :

- Soit a et b deux réels et la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto ax+b$
  Pour tous réels distincts u et v on a :

  $$\Delta y = f(u)-f(v)=(au+b)-(av+b)=a(u-v)= a\,\Delta x$$

- Soit f une fonction telle que pour tous réels distincts u et v, on ait $\dfrac{f(u)-f(v)}{u-v}=a$

  En particulier pour tout réel x et pour le réel 0 , d'image $f(0)=b$, on obtient :

  $f(x)-b=a(x-0) \Leftrightarrow f(x)=ax+b$

  On en déduit que f est une fonction affine.

3) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Propriété :

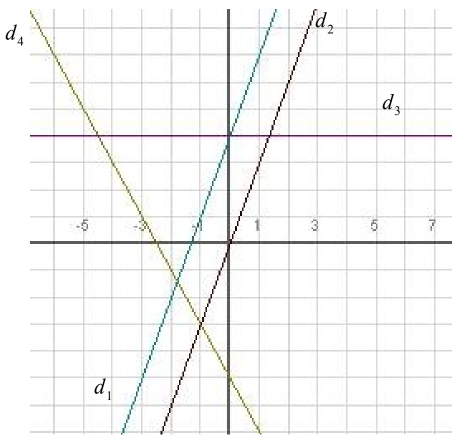
La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite**.

Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut représenter une fonction puisque cela signifierait qu'il existe un antécédent qui a une infinité d'images.

Cas particuliers :

- Si $b=0$, la représentation graphique de f est une droite passant par l'origine O du repère.
- Si $a=0$, la représentation graphique de f est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



Exemples :

- La fonction $x \longmapsto 3x+4$ est représentée par la droite d_1
- La fonction $x \longmapsto 3x$ est représentée par la droite d_2
- La fonction $x \longmapsto -2x-5$ est représentée par la droite d_4
- La fonction $x \longmapsto 4$ est représentée par la droite d_3

4) SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION AFFINE

Propriété :

Soit la fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$ où a et b sont des réels fixés.

- Si $a>0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a<0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$

- Si $a>0$, alors :
  $ax_1 < ax_2$
  $\Leftrightarrow \; ax_1+b < ax_2+b$
  $\Leftrightarrow \; f(x_1) < f(x_2)$
  Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Si $a<0$, alors :
  $ax_1 > ax_2$
  $\Leftrightarrow \; ax_1+b > ax_2+b$
  $\Leftrightarrow \; f(x_1) > f(x_2)$
  Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

5) SIGNE DE $ax+b$

Soit a et b deux réels, $a \neq 0$. On étudie le signe de $f(x)=ax+b$

- Si $a>0$, $\quad ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{b}{a} ; +\infty\right[$ ...
- Si $a<0$, $\quad ax+b>0 \Leftrightarrow ax>-b \Leftrightarrow x<-\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty ; -\frac{b}{a}\right[$ ...

On peut résumer ceci dans les tableaux de signes suivants :

$a>0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$a<0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	