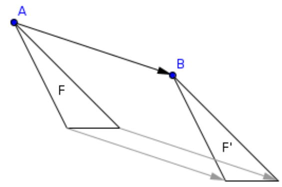
VECTEURS

1) TRANSLATION



Sur la figure ci-contre la figure F' est l'image de la figure F par la translation qui transforme A en B.
La flèche tracée de A vers B indique la direction, le sens et la longueur du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.

Définition :

Soit A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\vec{AB}$.
Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\vec{AB}$ est représenté par une flèche allant de A vers B.

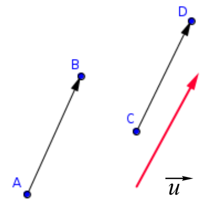
2) VECTEURS

Définition :

Soit deux points A et B donnés, D l'image de C par la translation qui transforme A en B.
Les points A et B, pris dans cet ordre et les points C et D, pris dans cet ordre. représentent le même **vecteur** $\vec{u}$.

$$\vec{u}=\vec{AB}=\vec{CD}$$

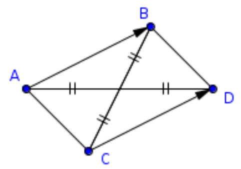
Cas particulier : $\vec{AA}$ est le **vecteur nul**. On écrit $\vec{AA}=\vec{0}$



Remarque : Il existe une infinité de façons de représenter un vecteur $\vec{u}$ car on peu le tracer en chaque point du plan.

Propriété :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.
- $\vec{AB}=\vec{CD}$ si et seulement $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\vec{AB}=\vec{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



Remarque :
Deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies:

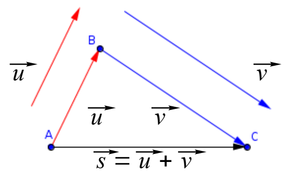
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles; on dit que les vecteurs ont **même direction**.
- le sens de A vers B est le même que de C vers D ; on dit que les vecteurs ont **le même sens.**
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur; on dit que les vecteurs ont **la même norme**.

3) SOMME DE VECTEURS

Définition :

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{s}$ résultant de l'enchaînement des translations t de vecteur $\vec{u}$ et t' de vecteur $\vec{v}$. On écrit :

$$\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}$$



Remarque :
La somme de trois vecteurs peut se construire à partir de la somme de deux quelconques d'entre eux, puis du troisième.

Propriété (relation de Chasles) :

Soit A, B et C trois points du plan . On a :

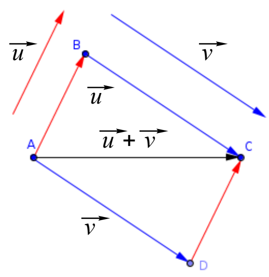
$$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC}.$$

Propriété (règle du parallélogramme) :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.
Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{AC}$

Preuve :

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\vec{AD}=\vec{BC}$, donc $\vec{AB}+\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$, d'après la relation de Chasles.



Remarque :
Lorsque les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont dessinés avec une origine commune A, il suffit de dessiner le parallélogramme $ABCD$ pour obtenir le vecteur somme de ces deux vecteurs.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ quatre vecteurs . On a :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
- si $\vec{u}=\vec{v}$ et $\vec{w}=\vec{t}$ alors $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{t}$

Définition :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et A et B deux points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

- On appelle **vecteur opposé** au vecteur $\vec{u}$ le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$.
- On appelle **différence** entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$ obtenu en effectuant la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

Application :

Soit trois points A , B et I . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- I est le milieu du segment $[AB]$.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- B est le symétrique de A par rapport à I .
- $\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$

4) COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS LE PLAN

Dans la suite du cours, le plan est muni d'un repère (O,I,J)

Définition :

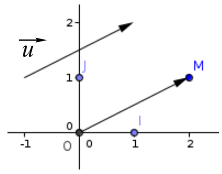
Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.

Remarque :

Puisque l'origine O a pour coordonnées $(0;0)$, alors pour tout point M du plan de coordonnées $(x;y)$,

Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont $\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exemple : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque :

On note $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$. On parle alors de repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, plutôt que de repère (O,I,J) .

Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur . Pour tous les points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égales.

Remarque :

Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont donc aussi les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

- $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si $x=x'$ et $y=y'$
- $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$
- $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$

Preuves :

- Conséquence de la propriété précédente.
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$. $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_A-x_B \\ y_A-y_B \end{pmatrix}$ qui sont bien les opposées de celles de $\vec{u}$.

- Soit A , B et C tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. D'après la relation de Chasles, on peut dire que $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{BC}$ et de $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_C-x_B \\ y_C-y_B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix}$
On a bien $(x_B-x_A)+(x_C-x_B)=x_C-x_A$ et $(y_B-y_A)+(y_C-y_B)=y_C-y_A$.

- Puisque $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$, alors $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+(-x') \\ y+(-y') \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$.

5) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et k un réel .
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

On admettra qu'il est indépendant du repère choisi.

Remarques :

- $1\vec{u}=\vec{u}$, $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$, $0\vec{u}=\vec{0}$, $2\vec{u}=\vec{u}+\vec{u}$, $3\vec{u}=\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$ ...
- $k\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Remarque :

Dans un repère, pour étudier la colinéarité de deux vecteurs non nul $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on peut déterminer s'il existe un réel k tel que $x'=kx$ et $y'=ky$. (ce qui revient à étudier la proportionnalité des coordonnées)

On peut aussi introduire la propriété suivante, appelée « condition analytique de colinéarité »
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.
Ce nombre se note det($\vec{u}$, $\vec{v}$)= $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

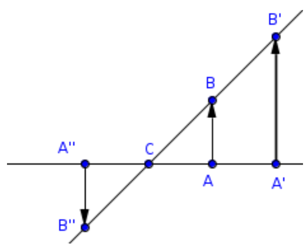
Ce résultat est immédiat si l'un des vecteurs est nul et traduit la proportionnalité des coordonnées si les deux vecteurs sont non nuls.

Remarque :

Soit A , B , A' et B' quatre points du plan.
- Si une homothétie de rapport λ transforme A en A' et B en B' , alors $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\overrightarrow{AB}$
- Si une symétrie centrale transforme A en A' et B en B' , alors $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$

Exemple :

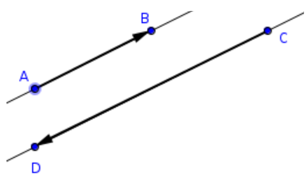
- Les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre C et de rapport 2 . On a $\overrightarrow{A'B'}=2\overrightarrow{AB}$.
- Les points A'' et B'' sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre C et de rapport -1, c'est à dire par la symétrie centrale de centre C . On a $\overrightarrow{A''B''}=-\overrightarrow{AB}$.

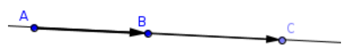


Propriétés :

Soit A , B , C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- Trois points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.





Remarque :

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.