VARIATIONS ET EXTREMUMS

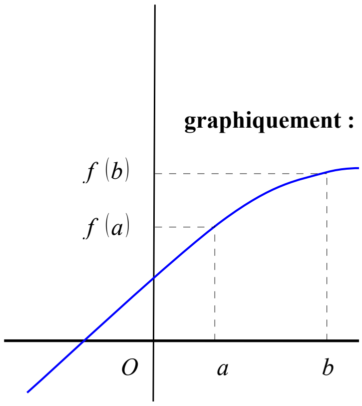
1) SENS DE VARIATIONS

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- On dit que f est **croissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.

- On dit que f est **strictement croissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)<f(b)$.

graphiquement : "La courbe monte"



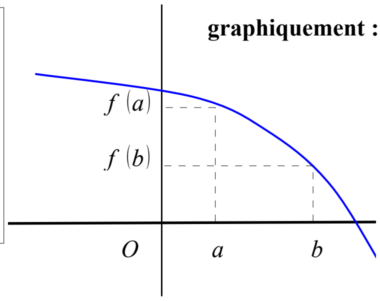
Une fonction strictement croissante est forcément croissante.
Une fonction croissante **conserve l'ordre**.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
- On dit que f est **décroissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.

- On dit que f est **strictement décroissante** sur I, lorsque pour tous réels a et b de I, tels que $a<b$, on a $f(a)>f(b)$.

graphiquement : "La courbe descend"



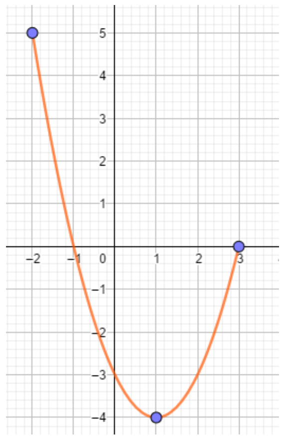
Une fonction strictement décroissante est forcément décroissante.
Une fonction décroissante **change l'ordre**.

Remarques :
- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I, lorsque f est soit croissante (respectivement strictement) sur I, soit décroissante (respectivement strictement) sur I.

- On ne parle de croissance ou de décroissance que sur un intervalle.

- Etudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.
  On résume ces résultats dans un tableau appelé **tableau de variations**.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-2;3]$ par la courbe représentée ci-contre.



On résume les variations de f dans le tableau :

x	-2	1	3
f	5 ↘	-4 ↗	0

2) EXTREMUMS

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_m et x_M deux réels de I. On dit que :

- f admet **un minimum** sur I en x_m, si pour tout réel x de I, $f(x_m) \leqslant f(x)$
- f admet **un maximum** sur I en x_M, si pour tout réel x de I, $f(x_M) \geqslant f(x)$

Si f admet un minimum ou un maximum, on dit que f admet **un extremum**.

Exemple :

Pour la fonction de l'exemple précédent, -4 est le minimum sur $[-2;3]$ atteint pour $x=1$.

Remarque :

Une fonction n'admet pas nécessairement de maximum ou de minimum sur un intervalle . (En particulier, sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert)

3) VARIATIONS DES FONCTIONS AFFINES

Propriété :

Soit la fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$ où a et b sont des réels fixés.

Pour tous réels u et v distincts, on a :

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=a$$

Ce quotient s'appelle le **taux d'accroissement** de f entre u et v .

Preuve :

Pour tous réels u et v distincts, on a :

$$\frac{f(u)-f(v)}{u-v}=\frac{au+b-(av+b)}{u-v}=\frac{au-av}{u-v}=\frac{a(u-v)}{u-v}=a$$

Propriété :

Soit la fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$ où a et b sont des réels fixés.

- Si $a>0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a<0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit deux réels u et v tels que $u<v$

- Si $a>0$, alors :
  $au<av$
  $\Rightarrow au+b<av+b$
  $\Rightarrow f(u)<f(v)$
  Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Si $a<0$, alors :
  $au>av$
  $\Rightarrow au+b>av+b$
  $\Rightarrow f(u)>f(v)$
  Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pour résumer :

$\boldsymbol{a>0}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$\boldsymbol{a<0}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\searrow$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

4) VARIATIONS DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

A) LA FONCTION CARRÉ

Propriété :

- La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;0]$.
- La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$. On a alors :

$$f(a)-f(b)=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

1er cas: $a<b\leqslant 0$

$a-b<0$ puisque $a<b$,
$a+b<0$ puisque a et b sont négatifs ou nuls.

D'après la règle des signes d'un produit, on en déduit que :

$$(a-b)(a+b)>0$$
$$\Rightarrow \quad f(a)-f(b)>0$$
$$\Rightarrow \quad f(a)>f(b)$$

La fonction carrée est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

2ème cas: $0\leqslant a<b$

$a-b<0$ puisque $a<b$,
$a+b>0$ puisque a et b sont positifs ou nuls.

D'après la règle des signes d'un produit, on en déduit que:

$$(a-b)(a+b)<0$$
$$\Rightarrow \quad f(a)-f(b)<0$$
$$\Rightarrow \quad f(a)<f(b)$$

La fonction carrée est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Remarques :

- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés
- Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés

Le **tableau de variations** de la fonction carrée est donc:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction carrée admet un minimum en 0, de valeur 0.

$\forall\, x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$ et $0^2=0$

B) LA FONCTION INVERSE

Propriété :

- La fonction inverse $f: x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $]-\infty;0[$.
- La fonction inverse $f: x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $]0;+\infty[$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction inverse $f: x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ tels que $a<b$. On a alors:

$$f(a)-f(b)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$$

1er cas: $a<b<0$

$b-a>0$ puisque $a<b$,
$ab>0$ puisque c'est le produit de deux nombres de même signe.

On en déduit que : $\dfrac{b-a}{ab}>0$

$$\Rightarrow \quad f(a)-f(b)>0$$
$$\Rightarrow \quad f(a)>f(b)$$

La fonction inverse est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

2ème cas: $0<a<b$

Démonstration identique

Remarques :

- Deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
- Deux nombres strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Le **tableau des variations** de la fonction inverse est donc:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

La double barre verticale en 0 est là pour signifier que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

C) LA FONCTION RACINE CARRÉE

Propriété :

La fonction racine carrée $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction racine carrée $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ tels que $a<b$. On a alors :

$$f(a)-f(b)=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Or $a<b \Leftrightarrow a-b<0$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$

On en déduit que : $f(a)-f(b)<0 \quad \Rightarrow \quad f(a)<f(b)$

La fonction racine carrée est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Le **tableau des variations** de la fonction racine carrée est donc :

x	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$

D) LA FONCTION CUBE

Propriété :

La fonction cube $f : x \longmapsto x^3$ est **strictement croissante** sur $[-\infty;+\infty[$.

Le **tableau des variations** de la fonction cube est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$