

PROBABILITÉS ET PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

1) EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

A) EXPÉRIENCE ALÉATOIRE, ÉVENTUALITÉ, UNIVERS

Un exemple bien connu : (On considère cet exemple jusqu'à la fin du chapitre)

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé **et noter** le nombre figurant sur une des faces est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat : 1, 2, ..., 6 ?

On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire**, c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. En général, on le note Ω .

Exemple : Les éventualités sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6 et $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

B) ÉVÉNEMENT

Définition :

On appelle **événement** toute partie de l'univers.

Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note $\omega \in \Omega$).

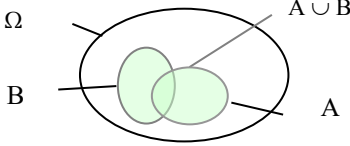
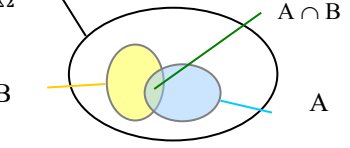
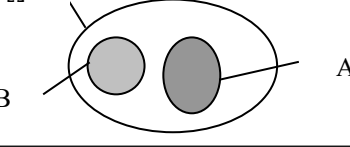
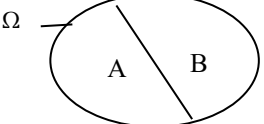
Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$).

Exemple : Par exemple, on peut considérer l'événement A : " obtenir un nombre pair ". On a $A = \{2; 4; 6\}$

Remarque : Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A, on dit que ω réalise A.

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.

A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION	EXEMPLE
Cardinal de A : $\text{card}(A)$	nombre d'éventualités qui composent A	L'événement A : " obtenir un nombre pair " est composé de 3 éventualités . $\text{card}(A) = 3$
Événement élémentaire	événement réduit à une seule éventualité	L'événement B : " obtenir le nombre 3 " ; $B = \{3\}$
Événement impossible : $A = \emptyset$	événement qui ne se réalise jamais	L'événement C : " obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 "
Événement certain : $A = \Omega$	événement qui se réalise toujours	L'événement D : " obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 "
C est la réunion de A et de B : $C = A \cup B$ (on dit A ou B)	C' est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B 	Soit l'événement E : " obtenir un nombre au moins égal à 4 " ; $E = \{4; 5; 6\}$ Soit l'événement F : " obtenir un nombre impair " ; $F = \{1; 3; 5\}$ L'événement $E \cup F$ est " obtenir un nombre au moins égal à 4 ou un nombre impair " $E \cup F = \{1; 3; 4; 5; 6\}$
C est l' intersection de A et de B : $C = A \cap B$ (on dit A et B)	C'est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps. 	L'événement $E \cap F$ est " obtenir un nombre au moins égal à 4 et un nombre impair " c'est à dire " obtenir un nombre impair au moins égal à 4 " $E \cap F = \{5\}$
A et B sont disjoints ou incompatibles	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ; $A \cap B = \emptyset$ 	Les événements E et B sont incompatibles . $E \cap B = \emptyset$
A et B sont contraires ou complémentaires . $B = \bar{A}$	$A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ $\bar{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A . 	Les événements A et F sont contraires. $F = \bar{A}$

2) LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI

Définition :

On note $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.

Définir une loi de probabilité sur Ω , c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles. Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

On garde ces notations pour le reste du chapitre.

Remarque : Pour toute éventualité ω_i on a : $0 \leq p_i \leq 1$.

Propriétés :

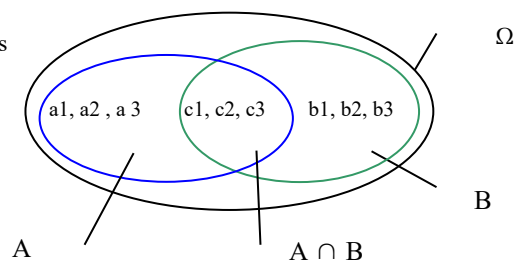
Soit A et B deux événements de Ω , alors :

- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Idée de preuve :

- L'exemple suivant illustre : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

On voit bien que l'intersection intervient deux fois



- On a : $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) \Leftrightarrow 1 = P(A) + P(\bar{A}) - P(A \cap \bar{A}) \Leftrightarrow 1 = P(A) + P(\bar{A}) \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

3) CAS PARTICULIER : ÉQUIPROBABILITÉ

Définition - Propriété :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités ω , on a :

$$p_i = P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Remarque :

Les expressions suivantes "dé parfait ou équilibré", "boules indiscernables" ... indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exemple :

Le dé est non truqué : chacune des faces a la même chance d'être obtenue. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité. Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement A : "obtenir un nombre pair" est : $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

4) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.

On appelle « **probabilité conditionnelle de A par rapport à B** » ou « **probabilité de A sachant B** » le réel, noté $P_B(A)$ défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarques :

- Dans le cas d'un univers fini où les issues sont équiprobables, on a : $P_B(A) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}$
- Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}$
- Si $B \subset A$, alors $A \cap B = B$ et $P_B(A) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

Exemple :

Un lycée a présenté 356 candidats au bac, dont 96 suivant la spécialité SVT. 256 élèves ont été admis à l'examen ; parmi eux 64 ont suivi la spécialité SVT.

Un élève étant choisi au hasard parmi les candidats présentés par le lycée, on note A l'événement : « l'élève a suivi la spécialité SVT » et B l'événement : « l'élève a été reçu au bac ».

Chaque élève a la même chance d'être choisi ; par équiprobabilité, on a donc :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{64}{256} = \frac{1}{4} = 0,25$$

La probabilité que l'élève a suivi la spécialité SVT **sachant qu'il est reçu au bac**, est donc égale à 0,25.

$$\text{On a aussi } P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)} = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}$$

En général :
 $P_B(A) \neq P_A(B)$

Ainsi la probabilité que l'élève soit reçu au bac **sachant qu'il a suivi la spécialité SVT** est $\frac{2}{3}$.

Propriétés :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. On a :

$$0 \leq P_B(A) \leq 1 \quad \text{et} \quad P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$$

Preuve :

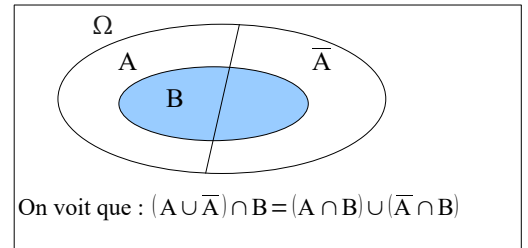
- On a $A \cap B \subset B$, donc $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$ et en divisant les trois membres de cette inégalité par le nombre strictement positif $P(B)$, on obtient : $0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq P_B(A) \leq 1$

- On a $P_B(A \cup \bar{A}) = \frac{P((A \cup \bar{A}) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B))}{P(B)}$

Or $P_B(A \cup \bar{A}) = P_B(\Omega) = 1$ et les événements $(A \cap B)$ et $(\bar{A} \cap B)$ sont incompatibles.

Ce qui donne :

$$1 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow 1 = P_B(A) + P_B(\bar{A}) \Leftrightarrow P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$$



Propriété :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$. On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_B(A) \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Ces égalités se déduisent de la définition précédente.

Ces deux égalités se retiennent assez facilement : pour que l'événement A et B soit réalisé, il faut d'abord que l'événement A le soit, et sachant que l'événement A est réalisé, il faut ensuite que l'événement B le soit aussi ...

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et cinq rouges, indiscernables au toucher.

On tire au hasard une première boule de l'urne. Si elle est bleue, on la remet dans l'urne et on rajoute une autre boule bleue ; si elle est rouge, on ne la remet pas dans l'urne. On tire ensuite, au hasard, une seconde boule de l'urne.

On s'intéresse à la probabilité pour que les deux boules extraites soient bleues.

B_1 est l'événement : « la première boule extraite est bleue » ; B_2 est l'événement : « la seconde boule extraite est bleue ».

L'événement « les deux boules extraites sont bleues » est alors $B_1 \cap B_2$.

$$\text{On a } P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$$

Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc : $P(B_1) = \frac{3}{8}$

B_1 étant réalisé, on rajoute une boule bleue, si bien qu'au moment du second tirage il y a 4 boules bleues sur 9 boules dans l'urne.

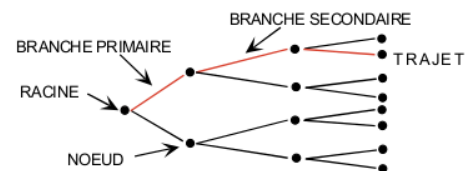
$$\text{Ce qui permet d'écrire } P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{9}$$

On en déduit : $P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{6}$. La probabilité que les deux boules extraites soient bleues est donc égale à $\frac{1}{6}$.

5) RÈGLES DE CONSTRUCTION D'UN ARBRE PONDÉRÉ (ou arbre de probabilités)

Pour déterminer des probabilités, on peut être amené à construire des arbres dont les branches sont affectées de probabilités.

- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est la **racine** de l'arbre.
- Les traits partant de la racine sont appelés **branches primaires** de l'arbre. Elles mènent à des **nœuds**.
- Les branches joignant deux nœuds sont dites **secondaires**.
- Tout chemin menant de la racine à un nœud est appelé **trajet**.



Règles :

- Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une **partition** de l'univers Ω .
- Le **poids** d'une branche primaire est la **probabilité** de l'événement qui se trouve à son extrémité.
- Le poids d'une branche secondaire est la **probabilité conditionnelle** de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
- Le poids ou la probabilité d'un trajet (ou chemin) est le **produit** des poids des branches le constituant.

Remarques :

- La somme des poids des branches primaires vaut 1.
- La somme des poids des branches secondaires issues d'un même nœud vaut 1.

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et deux boules rouges.

On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne.

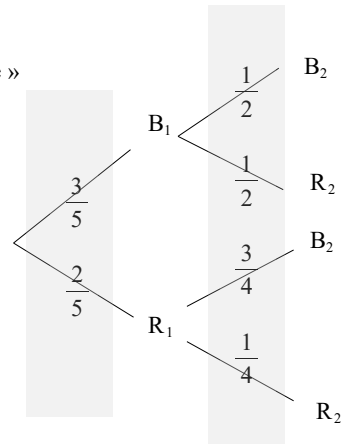
L'expérience aléatoire peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :

On note B_i : « la i ème boule est bleue » et R_i : « la i ème boule est rouge »

- La probabilité que la deuxième boule soit rouge sachant que la première première était bleue est :

$$P_{B_1}(R_2) = \frac{1}{2} \quad . \text{ (règle 3)}$$

- $P(R_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ (règle 4)



6) LOI DES GRANDS NOMBRES

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois une expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser, ce qui n'est parfois que théorique car répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions n'est pas toujours envisageable.

Ce constat est un résultat mathématique appelé " **La loi des grands nombres** " ; Il se démontre, mais la démonstration est largement hors de vos compétences :

Propriété :

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

Ce qui nous permet de comprendre la raison pour laquelle, il y a un peu près autant d'hommes que de femmes sur la terre.