

COURBES REPRÉSENTATIVES DE FONCTIONS ET FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1) VOCABULAIRE DES FONCTIONS

Définition :

Soit D_f un ensemble de nombre.

On appelle **fonction** f sur l'ensemble D_f le procédé mathématique qui permet d'associer à tout nombre x de D_f un réel unique noté $f(x)$.

On note $f : x \mapsto f(x)$ (lire : « fonction f qui à tout x associe le nombre $f(x)$ »)

Vocabulaire :

- $f(x)$ est l'**image** de x (lire : " f de x ").
- x est un **antécédent** de $f(x)$
- D_f est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f .

Remarques :

- x ne représente pas un réel donné, mais n'importe le quel des éléments de l'intervalle D_f . On dit que x est une variable.
(On peut aussi utiliser les lettres u , t , etc)
- On a appelé la fonction f , mais rien ne nous oblige à l'appeler ainsi. (On utilise souvent les lettres g , h , etc ou f_1 , f_2 ...)

Exemple : Sur l'intervalle $[-2 ; 2]$, on considère la fonction $f : x \mapsto 3x - 1$

On a $f(-2) = 3 \times (-2) - 1 = -7$

On en déduit que l'image de -2 par la fonction f est -7 et que -2 est un antécédent de -7 par la fonction f

Remarques :

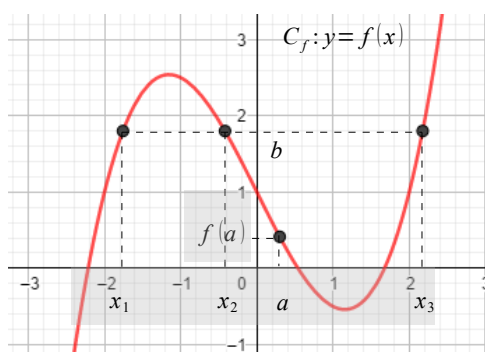
- Si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.
- Dans la pratique, les fonctions sont souvent données sans que soit précisé l'ensemble de définition.
- Dans ce cas, il ne faut pas oublier de chercher D_f en se rappelant qu'il s'agit de tous les réels x tels que $f(x)$ soit "calculable".

2) COURBE REPRÉSENTATIVE D'UNE FONCTION

On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition :

On appelle **représentation graphique** (ou **courbe représentative**) d'une fonction f l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ où x appartient à l'ensemble de définition.



- On note, le plus souvent, C_f la courbe représentative de f .

- On dit que la courbe C_f a pour **équation cartésienne** $y = f(x)$ relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- $f(a)$ est l'unique **image** de a . (On place a sur l'axe des abscisses et on lit son image $f(a)$ sur l'axe des ordonnées)

- x_1 , x_2 et x_3 sont **les antécédents** de b . (On place b sur l'axe des ordonnées et on lit ses antécédents x_1 , x_2 ... sur l'axe des abscisses)

Remarques :

- On a déjà insisté sur le fait que pour tout réel x de D_f , $f(x)$ est unique.
On en déduit une interprétation géométrique : toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe représentative d'une fonction en au plus un point. Ceci est un moyen simple pour savoir si une courbe représente ou non une fonction ...
- Un réel peut admettre aucun antécédent, ou un, ou plusieurs antécédents.

3) FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

A) FONCTIONS AFFINES

Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 5x - 2$ est une fonction affine.

Cas particuliers :

- Si $b = 0$, on dit que la fonction est **linéaire**.
- Si $a = 0$, la fonction est du type $f : x \mapsto b$ où b est un réel fixé, elle est donc **constante**.

Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite**.

Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

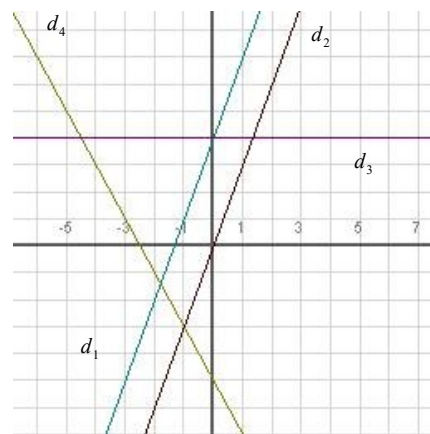
Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut représenter une fonction puisque cela signifierait qu'il existe un antécédent qui a une infinité d'images.

Cas particuliers :

- Si $b = 0$, la représentation graphique de f est une droite passant par l'origine O du repère.
- Si $a = 0$, la représentation graphique de f est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemples :

- La fonction $x \mapsto 3x + 4$ est représentée par la droite d_1
- La fonction $x \mapsto 3x$ est représentée par la droite d_2
- La fonction $x \mapsto -2x - 5$ est représentée par la droite d_4
- La fonction $x \mapsto 4$ est représentée par la droite d_3



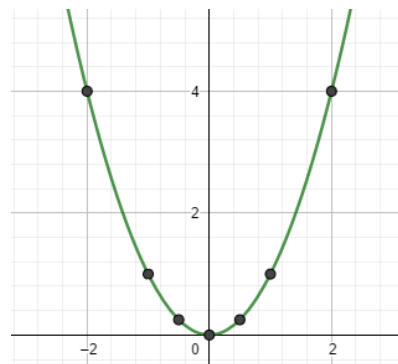
B) LA FONCTION CARRÉ

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son carré x^2 , est appelée **fonction carré**.

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction de référence, on établit un tableau de valeurs, puis on place les points correspondant dans un repère orthogonal (orthonormé de préférence)

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	16	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	16



Définition :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** d'équation $y = x^2$.

Le point $O(0; 0)$ est appelé **sommet de la parabole**.

Propriété :

Dans un repère orthogonal, la parabole représentant la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Preuve :

Pour tout réel x , $(-x)^2 = x^2$, donc les points $M(x; x^2)$ et $M'(-x; (-x)^2)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque : Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. La parabole est donc située au-dessus de l'axe des abscisses.

C) LA FONCTION INVERSE

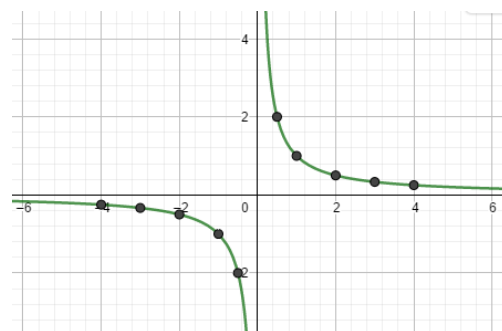
Définition :

La fonction définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ qui à tout nombre réel x non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$, est appelée **fonction inverse**.

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	3	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	-0,25	$-\frac{1}{3}$	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole** d'équation $y = \frac{1}{x}$.



Propriété :

Dans un repère orthogonal, l'hyperbole représentant la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$ du repère.

Preuve :

Pour tout réel x , $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$, donc les points $M(x; \frac{1}{x})$ et $M'(-x; -\frac{1}{x})$ sont symétriques par rapport à O.

Remarques :

- La fonction inverse n'est pas définie en 0. Ce qui explique que l'hyperbole est composée de deux branches distinctes.
- Les nombres x et $\frac{1}{x}$ sont de même signe. Ce qui explique que l'hyperbole est située au-dessous de l'axe des abscisses sur $] -\infty; 0[$ et au-dessus sur $] 0; +\infty[$.

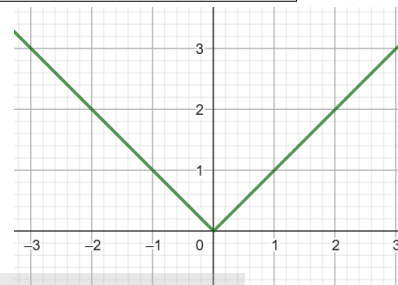
D) LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est appelée **fonction valeur absolue**.

Propriété :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentant la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Preuve :

Pour tout réel x , $|-x| = |x|$, donc les points $M(x; |x|)$ et $M'(-x; |-x|)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarques :

- Pour tout réel x , $|x| \geq 0$. la courbe représentant la fonction valeur absolue est donc située au-dessus de l'axe des abscisses.
- La courbe est la réunion des deux demi-droites d'équations $y = -x$ sur $] -\infty; 0[$ et $y = x$ sur $] 0; +\infty[$.

E) ET IL EST BIEN DE CONNAÎTRE AUSSI LES FONCTIONS CUBE ET RACINE CARRÉE

Définition :

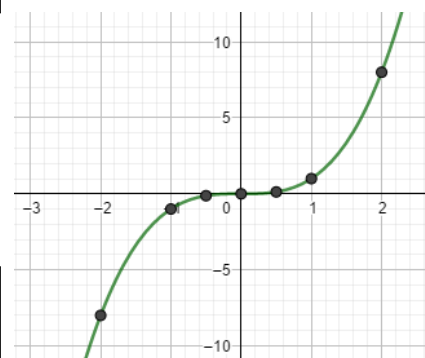
La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son cube x^3 , est appelée **fonction cube**.

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)=x^3$	-64	-27	-8	-1	-0,125	0	0,125	1	8	27	64

Propriété :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentant la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$ du repère.

Les fonctions cube et racine carrée ne sont plus explicitement dans le programme de seconde, néanmoins ce sont des fonctions très connues que je préfère vous présenter le plus tôt possible.



Remarque : Les nombres x et x^3 sont de même signe. Ce qui explique que la courbe représentant la fonction cube au-dessous de l'axe des abscisses sur $] -\infty; 0[$ et au-dessus sur $] 0; +\infty[$.

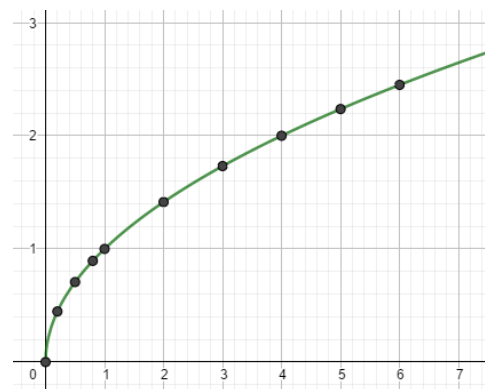
Définition :

La fonction définie sur $] 0; +\infty[$ par $x \mapsto \sqrt{x}$, est appelée **fonction racine carrée**.

x	0	0,2	0,5	0,8	1	2	3	4	5	6
$f(x)=\sqrt{x}$ (à 10^{-2} près)	0	0,45	0,71	0,89	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45

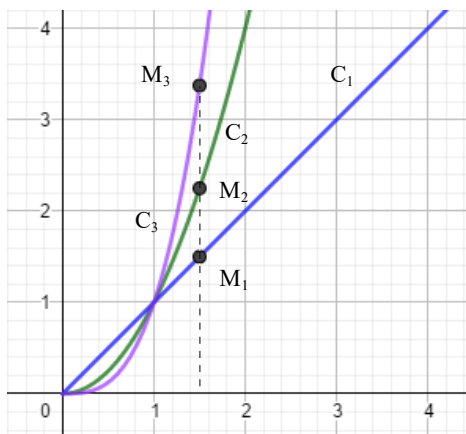
Remarque : Pour tout réel $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$.

Ce qui explique que la courbe représentant la fonction racine carrée est dans la partie du repère où abscisses et ordonnées sont positives.



F) POSITIONS RELATIVES

On note respectivement C_1 , C_2 et C_3 les courbes représentatives des fonctions $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$ et $f_3 : x \mapsto x^3$.



Les points de coordonnées (0;0) et (1;1) sont communs aux trois courbes

Propriété :

- Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $x \geq x^2 \geq x^3$.

Conséquence graphique sur $[0; 1]$: C_1 est au-dessus de C_2 qui est elle-même au-dessus de C_3

- Pour tout $x \geq 1$, on a $x \leq x^2 \leq x^3$

Conséquence graphique sur $[1; +\infty[$: C_3 est au-dessus de C_2 qui est elle-même au-dessus de C_1

La fonction cube n'est plus au programme de seconde, néanmoins la démonstration est intéressante et ne pose aucune difficulté.

Preuve :

Soit un réel $x \geq 0$. On considère les points $M_1(x; x)$, $M_2(x; x^2)$ et $M_3(x; x^3)$

- Sur $[0; 1]$, on a :

$$0 \leq x \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq x^2 \leq x \quad (\text{en multipliant par } x \text{ positif})$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq x^3 \leq x^2 \quad (\text{en multipliant à nouveau par } x \text{ positif})$$

$\Rightarrow$

$$y_{M_3} \leq y_{M_2} \leq y_{M_1}$$

Le point M_1 est donc au-dessus du point M_2 qui est au-dessus du point M_3 .

- Sur $[1; +\infty[$, on a :

$$x \geq 1$$

$\Rightarrow$

$$x^2 \geq x \quad (\text{en multipliant par } x \text{ positif})$$

$\Rightarrow$

$$x^3 \geq x^2 \quad (\text{en multipliant à nouveau par } x \text{ positif})$$

$\Rightarrow$

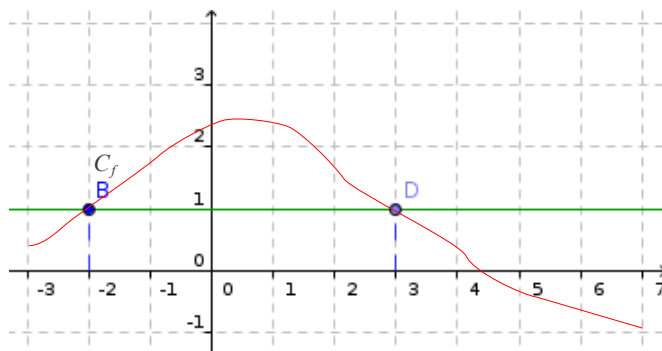
$$y_{M_1} \leq y_{M_2} \leq y_{M_3}$$

Le point M_3 est donc au-dessus du point M_2 qui est au-dessus du point M_1 .

4) RÉSOLUTIONS GRAPHIQUES D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

A) $f(x) = b$ - $f(x) > b$

On a représenté la courbe C_f représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 7]$.



Résolution d'une équation :

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y = 1$.

$$S = [-2; 3]$$

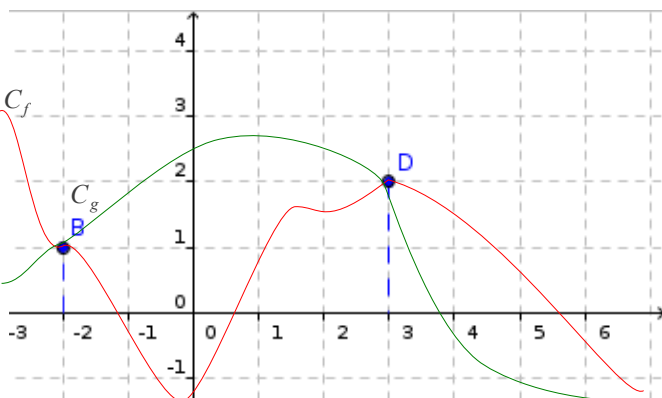
Résolution d'une inéquation :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement « en dessous » de la droite d'équation $y = 1$.

$$S = [-3; -2[\cup]3; 7]$$

B) $f(x) = g(x)$ - $f(x) > g(x)$

On a représenté les courbes C_f et C_g représentant deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3; 7]$.



Résolution d'une équation :

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g .

$$S = [-2; 3]$$

Résolution d'une inéquation :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement « au dessus » des points de la courbe C_g .

$$S = [-3; -2[\cup]3; 7]$$