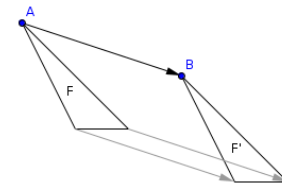


## Chapitre 7 - VECTEURS

### 1) TRANSLATION

Sur la figure ci-contre la figure  $F'$  est l'image de la figure  $F$  par la translation qui transforme  $A$  en  $B$ . La flèche tracée de  $A$  vers  $B$  indique la direction, le sens et la longueur du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.



#### Définition :

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan.

La translation qui transforme  $A$  en  $B$  est appelée translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

Lorsque  $A$  et  $B$  sont distincts, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est représenté par une flèche allant de  $A$  vers  $B$ .

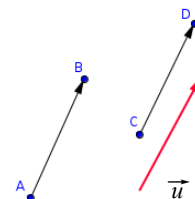
### 2) VECTEURS

#### Définition :

Soit deux points  $A$  et  $B$  donnés,  $D$  l'image de  $C$  par la translation qui transforme  $A$  en  $B$ .

Les points  $A$  et  $B$ , pris dans cet ordre et les points  $C$  et  $D$ , pris dans cet ordre, représentent le même **vecteur**  $\vec{u}$ .

Cas particulier :  $\overrightarrow{AA}$  est le **vecteur nul**. On écrit

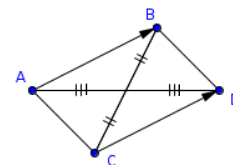


**Remarque :** Il existe une infinité de façons de représenter un vecteur  $\vec{u}$  car on peut le tracer en chaque point du plan.

#### Propriété :

Soit  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  si et seulement si  $[AD]$  et  $[BC]$  ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  si et seulement si  $ABDC$  est un parallélogramme (éventuellement aplati).



#### Remarque :

Deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies:

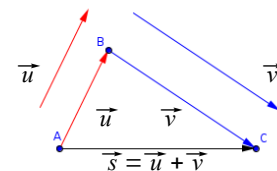
- Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles; on dit que les vecteurs ont
  - le sens de  $A$  vers  $B$  est le même que de  $C$  vers  $D$ ; on dit que les vecteurs ont
  - les segments  $[AB]$  et  $[CD]$  ont la même longueur; on dit que les vecteurs ont
- On note  $\|\overrightarrow{AB}\|$  la norme du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

### 3) SOMME DE VECTEURS

#### Définition :

La somme de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur  $\vec{s}$  résultant de l'enchaînement des translations  $t$  de vecteur  $\vec{u}$  et  $t'$  de vecteur  $\vec{v}$ . On écrit :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$



#### Remarque :

La somme de trois vecteurs peut se construire à partir de la somme de deux quelconques d'entre eux, puis du troisième.

#### Propriété (relation de Chasles) :

Soit  $A, B$  et  $C$  trois points du plan. On a :

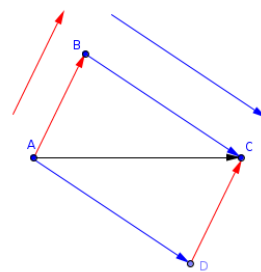
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

### Propriété (règle du parallélogramme) :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

Si ABCD est un parallélogramme, alors  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

### Preuve :



### Remarque :

Lorsque les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont dessinés avec une origine commune A, il suffit de dessiner le parallélogramme ABCD pour obtenir le vecteur somme de ces deux vecteurs.

### Propriétés :

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{i}$  quatre vecteurs. On a :

- $\vec{u} + \vec{v} =$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} =$
- $\vec{u} + \vec{0} =$
- si  $\vec{u} = \vec{v}$  et  $\vec{w} = \vec{i}$  alors

### Définition :

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs et A et B deux points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

- On appelle **vecteur opposé** au vecteur  $\vec{u}$  le vecteur noté  $-\vec{u}$  tel que  $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ .
- On appelle **différence** entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le vecteur noté  $\vec{u} - \vec{v}$  obtenu en effectuant la somme des vecteurs  $\vec{u}$  et  $-\vec{v}$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

### Application :

Soit trois points A, B et I. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- I est le milieu du segment [AB].
- 
- 
- 

## 4) COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS LE PLAN

Dans la suite du cours, le plan est muni d'un repère  $(O, I, J)$ , pas nécessairement orthonormé.

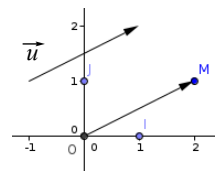
### Définition :

Soit A et B deux points de coordonnées  $(x_A; y_A)$  et  $(x_B; y_B)$ .

Les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  sont

### Remarque :

Puisque l'origine O a pour coordonnées  $(0; 0)$ , alors pour tout point M du plan de coordonnées  $(x; y)$ , Les coordonnées de  $\overrightarrow{OM}$  sont  $\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$ , c'est à dire  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .



### Exemple :

### Propriété :

Soit  $\vec{u}$  un vecteur. Pour tous les points A et B tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ , alors les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont égales. Les coordonnées d'un vecteur  $\vec{u}$  sont donc aussi les coordonnées du point M tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

### Définition et propriété :

**Une base des vecteurs du plan** est un couple  $(\vec{i}, \vec{j})$  formé de deux vecteurs non nuls qui n'ont pas la même direction. Une base est **orthonormée** dans le cas où  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ont des directions perpendiculaires et ont pour norme 1 unité de longueur.

Pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un unique couple  $(x; y)$  tels que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ .  
On dit que  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

**Remarque :** En notant  $\vec{i} = \vec{OI}$  et  $\vec{j} = \vec{OJ}$  :

- $(\vec{i}, \vec{j})$  est une base des vecteurs du plan.
- On parle alors de repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , plutôt que de repère  $(O, I, J)$

### Propriétés :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

- $\vec{u} = \vec{v}$  si et seulement si
- $-\vec{u}$  a pour coordonnées
- $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées
- $\vec{u} - \vec{v}$  a pour coordonnées

### Preuves :

- Conséquence de la propriété précédente.
- Si  $\vec{u} = \vec{AB}$  alors ses coordonnées sont  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .  $-\vec{u} = \vec{BA}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$  qui sont bien les opposées de celles de  $\vec{u}$ .
- Soit A, B et C tels que  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{BC}$ . D'après la relation de Chasles, on peut dire que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .  
Les coordonnées de  $\vec{AB}$ , de  $\vec{BC}$  et de  $\vec{AC}$  sont respectivement  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ .  
On a bien  $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$  et  $(y_B - y_A) + (y_C - y_B) = y_C - y_A$ .
- Puisque  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ , alors  $\vec{u} - \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + (-x') \\ y + (-y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$ .

### Propriété :

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  orthonormée.  
La norme du vecteur  $\vec{u}$  est

Immédiat en introduisant les points A et B tel que  $\vec{u} = \vec{AB}$   
et en utilisant la formule permettant de calculer la longueur AB.

## 5) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

### Définition :

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  dans une base  $(\vec{i}, \vec{j})$  et  $k$  un réel.  
Le vecteur  $k\vec{u}$  est le vecteur de coordonnées

On admettra qu'il est indépendant du repère choisi.

### Remarques :

- 
- 

### Définition :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires s'il existe un nombre réel  $k$  tel que

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

### Remarque :

Dans une base, pour étudier la colinéarité de deux vecteurs non nul  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , on peut déterminer s'il existe un réel  $k$  tel que  $x' = kx$  et  $y' = ky$ . (ce qui revient à étudier la proportionnalité des coordonnées)

### Propriété : Norme du vecteur $k\vec{u}$

Pour tout vecteur  $\vec{u}$  et pour tout réel  $k$ , on a :

### Preuve :

On se place dans une base orthonormée. On a  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .

### Définition :

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan dans une base orthonormée.

**Le déterminant** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le nombre réel  $xy' - x'y$ .

Ce nombre se note  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

### Propriété : Condition analytique de colinéarité

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .

### Preuve :

- On suppose que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
  - Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , le résultat est immédiat.
  - Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls, alors il existe un nombre réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

- Réciproquement**, on suppose que  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .
  - Si  $\vec{v} = \vec{0}$ , alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.
  - Si  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , alors l'une au moins de ses coordonnées est non nulle, par exemple  $x' \neq 0$ .

On a alors  $y = \frac{x}{x'} y'$ , c'est à dire  $y = k y'$  où  $k = \frac{x}{x'}$ .

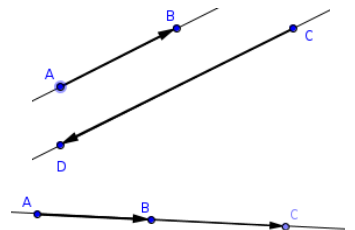
Ainsi  $\vec{u}$  a pour coordonnées  $(kx'; ky')$  et  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

La démonstration est identique si  $y' \neq 0$ .

### Propriétés :

Soit A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.



### Remarque :

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si