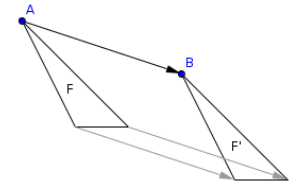


VECTEURS

1) TRANSLATION

Sur la figure ci-contre la figure F' est l'image de la figure F par la translation qui transforme A en B . La flèche tracée de A vers B indique la direction, le sens et la longueur du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.



Définition :

Soit A et B deux points du plan.

La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche allant de A vers B .

2) VECTEURS

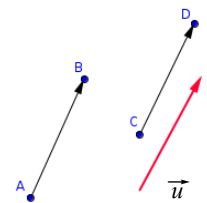
Définition :

Soit deux points A et B donnés, D l'image de C par la translation qui transforme A en B .

Les points A et B , pris dans cet ordre et les points C et D , pris dans cet ordre, représentent le même **vecteur** $\vec{u}$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Cas particulier : $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul**. On écrit $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

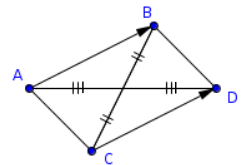


Remarque : Il existe une infinité de façons de représenter un vecteur $\vec{u}$ car on peut le tracer en chaque point du plan.

Propriété :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



Remarque :

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies:

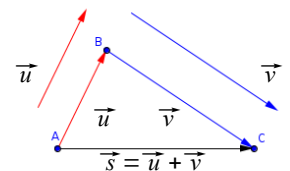
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles; on dit que les vecteurs ont **la même direction**.
- le sens de A vers B est le même que de C vers D ; on dit que les vecteurs ont **le même sens**.
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur; on dit que les vecteurs ont **la même norme**.
On note $\|\overrightarrow{AB}\|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) SOMME DE VECTEURS

Définition :

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{s}$ résultant de l'enchaînement des translations t de vecteur $\vec{u}$ et t' de vecteur $\vec{v}$. On écrit :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$



Remarque :

La somme de trois vecteurs peut se construire à partir de la somme de deux quelconques d'entre eux, puis du troisième.

Propriété (relation de Chasles) :

Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

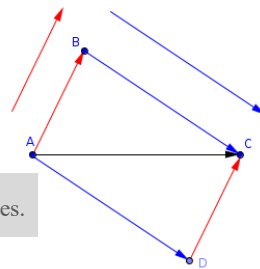
Propriété (règle du parallélogramme) :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Preuve :

Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, d'après la relation de Chasles.

**Remarque :**

Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont dessinés avec une origine commune A, il suffit de dessiner le parallélogramme ABCD pour obtenir le vecteur somme de ces deux vecteurs.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{i}$ quatre vecteurs. On a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- si $\vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{w} = \vec{i}$ alors $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{i}$

Définition :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- On appelle **vecteur opposé** au vecteur $\vec{u}$ le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.
- On appelle **différence** entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ obtenu en effectuant la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Application :

Soit trois points A, B et I. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- I est le milieu du segment [AB].
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- B est le symétrique de A par rapport à I.
- $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

4) COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS LE PLAN

Dans la suite du cours, le plan est muni d'un repère (O, I, J), pas nécessairement orthonormé.

Définition :

Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

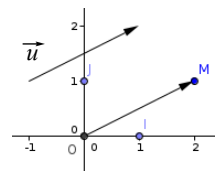
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Remarque :

Puisque l'origine O a pour coordonnées (0;0), alors pour tout point M du plan de coordonnées (x; y), Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont $\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple :

$$\overrightarrow{OI} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Propriété :**

Soit $\vec{u}$ un vecteur. Pour tous les points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égales. Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont donc aussi les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Définition et propriété :

Une base des vecteurs du plan est un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ formé de deux vecteurs non nuls qui n'ont pas la même direction. Une base est **orthonormée** dans le cas où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires et ont pour norme 1 unité de longueur.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple $(x; y)$ tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Remarque : En notant $\vec{i} = \vec{OI}$ et $\vec{j} = \vec{OJ}$:

- $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base des vecteurs du plan.
- On parle alors de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, plutôt que de repère (O, I, J)

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$.

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$
- $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$
- $\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$

Preuves :

- Conséquence de la propriété précédente.
- Si $\vec{u} = \vec{AB}$ alors ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. $-\vec{u} = \vec{BA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$ qui sont bien les opposées de celles de $\vec{u}$.
- Soit A, B et C tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$. D'après la relation de Chasles, on peut dire que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.
Les coordonnées de $\vec{AB}$, de $\vec{BC}$ et de $\vec{AC}$ sont respectivement $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$.
On a bien $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$ et $(y_B - y_A) + (y_C - y_B) = y_C - y_A$.
- Puisque $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, alors $\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + (-x') \\ y + (-y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ orthonormée.
La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Immédiat en introduisant les points A et B tel que $\vec{u} = \vec{AB}$ et en utilisant la formule permettant de calculer la longueur AB.

5) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ et k un réel.
Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

On admettra qu'il est indépendant du repère choisi.

Remarques :

- $1\vec{u} = \vec{u}$, $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$, $0\vec{u} = \vec{0}$, $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$, $3\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$...
- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Remarque :

Dans une base, pour étudier la colinéarité de deux vecteurs non nul $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on peut déterminer s'il existe un réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$. (ce qui revient à étudier la proportionnalité des coordonnées)

Propriété : Norme du vecteur $k\vec{u}$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k , on a :

$$\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$$

Preuve :

On se place dans une base orthonormée. On a $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

$$\|k\vec{u}\| = \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2} = \sqrt{k^2(x^2 + y^2)} = \sqrt{k^2} \sqrt{x^2 + y^2} = |k| \sqrt{x^2 + y^2} = |k| \|\vec{u}\|$$

Définition :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan dans une base orthonormée.

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $xy' - x'y$.

Ce nombre se note $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Propriété : Condition analytique de colinéarité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Preuve :

- On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
 - Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est immédiat.
 - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Ainsi $x = kx'$ et $y = ky'$.

On a alors : $xy' - x'y = (kx')y' - x'(ky') = 0$

- Réciproquement**, on suppose que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
 - Si $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
 - Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors l'une au moins de ses coordonnées est non nulle, par exemple $x' \neq 0$.

On a alors $y = \frac{x}{x'} y'$, c'est à dire $y = k y'$ où $k = \frac{x}{x'}$.

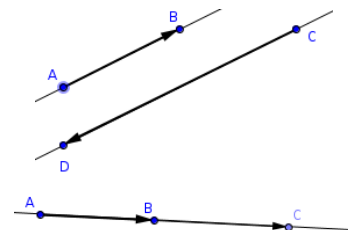
Ainsi $\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx'; ky')$ et $\vec{u} = k\vec{v}$.

La démonstration est identique si $y' \neq 0$.

Propriétés :

Soit A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.



Remarque :

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires.