

**Thèmes d'étude :**

**Modèles d'évolution  
Corrélation et causalité  
Répartition des richesses, inégalités**

Ces exercices sont à faire avec une calculatrice, un tableur ou un logiciel adapté (par exemple : sinequanon)

**Problèmes**

**Ex 10-1 : Taux de chômage au Japon**



Le tableau suivant présente l'évolution du taux de chômage, en pourcentage de la population active, au Japon, entre 1950 et 1996.

Année	1950	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année $x_i$	0	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Taux $y_i$ (en %)	1,2	1,6	1,6	1,2	1,1	2,0	2,6	2,1	3,1	3,4

- 1) Représenter le nuage de points correspondant à la série  $(x_i ; y_i)$ . On choisira un repère orthogonal pour lequel :  
1 cm représente 5 années sur l'axe des abscisses.  
1 cm représente un taux de chômage de 0,5 % sur l'axe des ordonnées.

- 2) Déterminer les coordonnées de point moyen  $G$  de ce nuage. Le placer sur le graphique.

- 3) On prend pour droite d'ajustement affine de ce nuage la droite  $D$  passant par  $G$  et de coefficient directeur 0,04.

- a) Déterminer une équation de la droite  $D$ .

- b) Représenter  $D$  sur le graphique.

- 4) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'ajustement précédent:

Quel est le taux de chômage prévisible pour 2005 ?

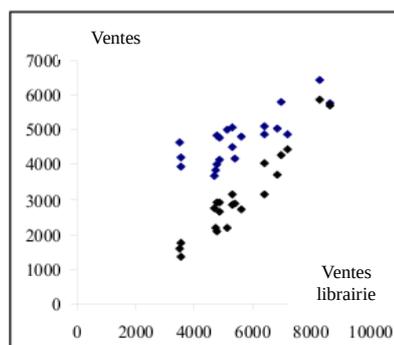
Le taux réel en 2005 est de 4,4 . Que peut-on conclure ?

- 5) Suivant cette prévision, à partir de quelle année le taux prévisible aurait-il dû dépasser 4,4 % ?

**Ex 10-2 : Catalogue de livres**

Livclub est un organisme qui distribue des livres sur catalogues. Il ne propose jamais d'ouvrage en première parution : il faut déjà qu'un ouvrage soit en vente depuis un an en librairie avant que Livclub ne puisse l'inscrire à son catalogue.

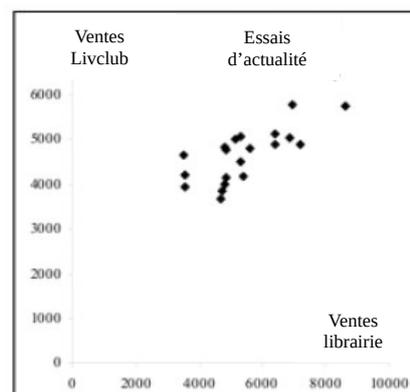
Avant de proposer un livre à la vente, Livclub connaît donc son tirage en librairie.

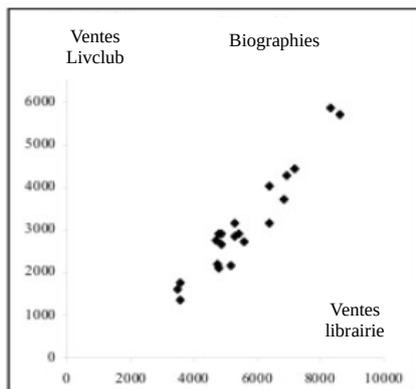


- 1) On a observé la relation suivante entre les ventes dans le circuit classique de distribution en librairie et les ventes de Livclub :

Le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux variables est  $\rho = 0,659$  . Que peut-on dire de la qualité de la relation ?

- 2) En fait, dans les ouvrages précédents, il y avait deux catégories : des essais d'actualité et des biographies historiques. Les graphiques suivants représentent la relation entre les ventes en librairies et les ventes de Livclub pour chacune de ces catégories :





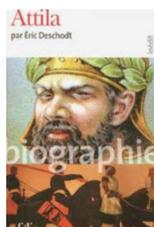
Des calculs ont donné les résultats suivants :  
 X = ventes en librairie et Y = ventes de Livclub

	Essais	Biographies
Moyenne de X	5 564,81	5 564,81
Moyenne de Y	4 743,76	3 105,44
Variance de X	1 935 081,01	1 935 081,01
Variance de Y	457 674,47	1 387 360,55
Covariance de X et Y	742 418,60	1 571 718,61

Calculer les coefficients de corrélation linéaire pour chacune des deux séries

3 ) Livclub a décidé d'inscrire à son catalogue la biographie d'Attila le Hun qui s'est vendue en librairie à 6500 exemplaires .

Combien d'ouvrages Livclub peut-il escompter vendre ?



**Ex 10-3 : Chiffres d'affaire**

Le tableau suivant représente l'évolution du chiffre d'affaire en milliers d'euros d'une entreprise pendant dix années, entre 2011 et 2020.



Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Rang de l'année $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre d'affaires $y_i$	110	130	154	180	190	210	240	245	270	295

1 ) Représenter le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$ .

2 ) Quel est, en pourcentage, l'augmentation du chiffre d'affaires entre les années 2011 et 2020 ? (on donnera le résultat à 1 % près par excès)

3 ) Soit  $G$  le point moyen du nuage. Calculer les coordonnées de  $G$  et placer  $G$  sur le graphique.

4 ) Semble-t-il judicieux de procéder pour cette série à un ajustement affine ?

5 ) Calculer les indicateurs suivants :  $\sigma(x)$ ,  $\sigma(y)$  et  $\sigma_{xy}$ . Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série. Juger de la qualité d'une approximation linéaire de la relation entre ces deux variables .

6) Donner, en utilisant la calculatrice, l'équation de la droite  $D$  de régression de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés.

7) Vérifier que  $G$  appartient à la droite  $D$  et tracer  $D$  sur le graphique.

8) En admettant que l'évolution continue au même rythme et en utilisant l'ajustement affine, quel chiffre d'affaires peut on prévoir pour l'année 2026 ?

9) On suppose qu'à partir de l'année 2020, le chiffre d'affaires progresse de 8 % par an . Quel est alors le chiffre d'affaires prévisible en 2026 ?

**Ex 10-4 : Sécheresse**

Lors d'une période de sécheresse, un agriculteur relève la quantité totale (en  $m^3$ ) utilisée par son exploitation depuis le premier jour et donne le résultat suivant :

Nombre de jours écoulés $x_i$	1	3	5	8	10
Volume utilisé (en $m^3$ ) $y_i$	2,25	4,3	8	17,5	27



1) Représenter la série  $(x_i ; y_i)$ .

2) Semble-t-il judicieux de procéder pour cette série à un ajustement affine ?

3) Calculer les indicateurs suivants :  $\sigma(x)$ ,  $\sigma(y)$  et  $\sigma_{xy}$ . Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de la série. Juger de la qualité d'une approximation linéaire de la relation entre ces deux variables .

4) Donner l'équation de la droite  $\Delta$  de régression de  $y$  en  $x$  obtenue par la méthode des moindres carrés sous la forme  $y = ax + b$  ( $a$  et  $b$  sont les arrondis à  $10^{-2}$  près des valeurs lues sur la calculatrice) . Représenter la droite  $\Delta$  sur le graphique.

5) Le nuage de points permet d'envisager un ajustement par la parabole  $P$  qui passe par des points  $A(1 ; 2,25)$  et  $B(10 ; 27)$ , et qui a pour équation  $y = c x^2 + d$  où  $c$  et  $d$  sont deux nombres réels .

a) Déterminer  $c$  et  $d$  et donnez l'équation de la parabole  $P$ .

b) Représenter la parabole  $P$  sur le graphique.

6) Dans cette question, on compare les deux ajustements à l'aide du tableau suivant :

$x_i$	1	3	5	8	10	
$y_i$	2,25	4,3	8	17,5	27	
$ y_i - (ax_i + b) $	2,54	0,91	2,71			Total $T_1$ :
$ y_i - (cx_i^2 + d) $	0	0,05	0,25			Total $T_2$ :

Les deux totaux calculés évaluent, pour chaque ajustement, la somme des écarts entre les ordonnées des points du nuage et les ordonnées des points de même abscisse de l'ajustement.

Donner les arrondis à  $10^{-1}$  près des deux totaux  $T_1$  et  $T_2$  calculés ci-dessus.

Déduire l'ajustement qui paraît le mieux adapté.

**Ex 10-5 : Dépenses des ménages en produits informatiques**

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 2010 à 2019 :

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Rang $x_i$ de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépense $y_i$	398	451	423	501	673	956	1077	1285	1427	1490

1) a) Dessiner le nuage de points  $M_i(x_i; y_i)$  dans le plan muni d'un repère orthogonal avec, pour unités graphiques 1 cm pour un rang en abscisse, 1cm pour 200 millions d'euros en ordonnée.

b) Déterminer les coordonnées de  $G$ , point moyen de nuage. Placez le point  $G$ .

**Droite de Mayer**

2) a)  $G_1$  désigne le point moyen des 5 premiers points du nuage et  $G_2$  celui des 5 derniers points.

Déterminer les coordonnées de  $G_1$  et  $G_2$ .

Placer ces points sur le graphique précédent et tracez la droite  $(G_1 G_2)$ . Le point  $G$  appartient-il à cette droite ?

b) Donnez l'équation de la droite  $(G_1 G_2)$  sous la forme  $y = ax + b$  (on arrondira les coefficients à 0,1 près)

c) Calculer avec un tableur ou à la calculatrice la somme des carrés des

résidus pour cet ajustement :  $S_1 = \sum_{i=1}^9 (y_i - (ax_i + b))^2$

d) En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2025.

**Ajustement des moindres carrés**

3) a) Donner, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite  $d$  d'ajustement affine de  $y$  en  $x$ , sous la forme  $y = mx + p$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 0,1 près).

b) Représenter  $d$  dans le repère précédent.

c) Calculer avec un tableur ou avec la calculatrice la somme des carrés des résidus pour cet ajustement :

$$S_2 = \sum_{i=1}^9 (y_i - (mx_i + p))^2 \quad \text{Conclusion ?}$$

d) En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2005.

## Ajustement logarithmique

La croissance des dépenses semblant « ralentir » entre 2017 et 2019, on envisage un ajustement logarithmique entre 2014 et 2019.

On pose  $t_i = \ln(x_i)$

4) a) Compléter le tableau suivant où  $t_i$  est arrondi à  $10^{-3}$

$t_i$						
$y_i$	673	956	1077	1285	1427	1490

b) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $t$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à  $10^{-3}$  près).

c) En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2025.

d) Tracer la courbe d'équation  $y = f(x)$ , où on explicitera l'expression de  $f$

## Ajustement exponentiel

Si, au contraire de la question 4, on ne s'intéresse qu'aux années 2010 à 2016, la forme du nuage suggère plutôt un ajustement exponentiel.

Pour  $0 \leq i \leq 6$ , on pose  $z_i = \ln(y_i)$

5) a) Compléter le tableau suivant où  $z_i$  est arrondi à  $10^{-3}$

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$z_i$							

b) Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de  $z$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à  $10^{-3}$  près).

c) En utilisant cet ajustement, effectuer une prévision sur les dépenses de l'année 2020.

d) Tracer la courbe d'équation  $z = g(x)$ , où on explicitera l'expression de  $g$