Thèmes d'étude :

Modèles d'évolution
Modèles définis par une fonction d'une variable

Comportement global d'une suite

Ex 1-1 : ***Vrai ou faux***

1) Une suite est toujours soit croissante, soit décroissante.

2) Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.

3) Si (u_n) est décroissante, alors $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$

4) Si $u_0 \geqslant u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3 \geqslant u_4$, alors (u_n) est décroissante.

5) Si (u_n) est de signe constant, alors (u_n) est monotone.

6) Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

a) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.

c) Si f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est bornée.

d) Si (u_n) est bornée, alors f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

7) Une suite décroissante peut avoir une limite égale à 100.

8) On peut déterminer le signe de la dérivée d'une suite (u_n) pour déterminer les variations de (u_n) .

Ex 1-2 : ***Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n***

Dans chaque cas, déterminer une formule de récurrence de la suite.

1) Chaque terme est égal au triple du terme précédent.

2) La somme de deux termes consécutifs est toujours égal à 5.

3) Chaque terme est une augmentation de 20 % du terme précédent.

4) $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \dfrac{3x+5}{4x+1}$

5) $u_n = 7^{n-3}$

6) $u_n = 2n - 5$

7) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

8) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

9) $u_0 = 8$, $u_1 = 10$, $u_2 = 13$, $u_3 = 17$, $u_4 = 22$ …

10) $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $u_2 = 21$, $u_3 = 85$ ...

Ex 1-3 : ***Étudier la monotonie***

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n^2 - 3n + 5$

2) $u_n = n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

3) $u_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$

4) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = u_n - 2n$

5) $u_n = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$

6) $u_n = \dfrac{n^2}{3^n}$

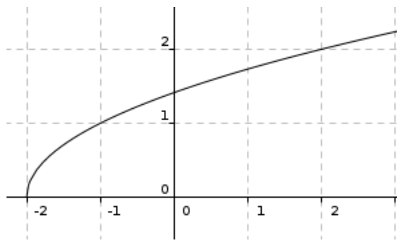
7) $u_n = n^3 - 12n^2 + 45n$ (Aide : étudier une fonction)

8) $u_n = \dfrac{n^2 - 4}{n^2 + 1}$ (Aide : étudier une fonction)

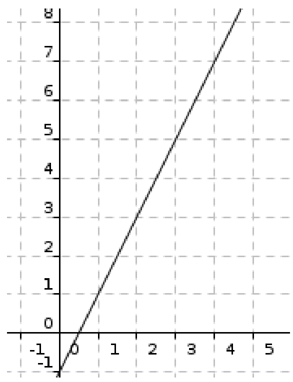
<u>Ex 1-4 :</u> Représenter graphiquement une suite définie par récurrence

Dans chaque cas, on considère la fonction f telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. À l'aide de la droite $d : y = x$, représenter les premiers termes de la suite sur les axes, puis conjecturer le comportement de la suite (variations et limites éventuelles).

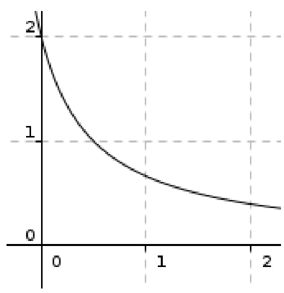
1) $u_0 = -1,5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$



2) $u_0 = 1,5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$



3) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 0,5}$



Limites de suites : les différents cas possibles

Ex 1-5 : ***Vrai ou faux***

1) Si l'intervalle $]2,999;3,001[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$

2) Si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, alors (u_n) converge vers L.

3) Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, où $A\in\mathbb{R}$, contient au moins un terme u_n avec $n\geqslant 100$, alors (u_n) tend vers + ∞ .

4) Si tout intervalle de la forme $]-\infty;B[$, où $B\in\mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d’un certain rang, alors (u_n) tend vers $-\infty$.

5) Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs, alors (u_n) converge.

6) Une suite peut avoir plusieurs limites.

7) Si une suite ne converge pas, alors sa limite est + ∞ ou - ∞ .

Ex 1-6 : ***Suite positive à partir d'un certain rang***

Montrer que toute suite qui converge vers 0,1 est strictement positive à partir d'un certain rang.

Opérations sur les limites

Ex 1-7 : ***Utiliser les opérations sur les limites***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=-2n^2+\frac{e}{n}$

2) $u_n=300-n^2\sqrt{2}$

3) $u_n=\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(5-\frac{1}{n^3}\right)$

4) $u_n=\frac{1}{(2n+1)(-n^2-9)}$

5) $u_n=\frac{n+2}{\frac{1}{\sqrt{n}}-3}$

6) $u_n=\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{5-\dfrac{2}{n^2}}$

7) $u_n=\dfrac{5n^2}{10-\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\left(5+\dfrac{1}{n}\right)}$

<u>Ex 1-8 :</u> ***Lever une indétermination***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\dfrac{n^5}{5}-\dfrac{n^2}{2}-\mathrm{e}$

2) $u_n=\dfrac{1}{2}n^4-2n^3+5n^2-\dfrac{1}{4}$

3) $u_n=\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+4}$

4) $u_n=\dfrac{9-n^2}{(3n+2)(2n+1)}$

5) $u_n=\sqrt{n}-n$

6) $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

7) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Ex 1-9 : ***Trouver des suites***

1) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v ayant pour limite + ∞ telles que :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=-\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=1$

d) $u-v$ n'a pas de limite.

2) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, telles que :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n)=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n)=0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n v_n)=1$

d) uv n'a pas de limite.

Ex 1-10 : ***Raisonnement par l'absurde***

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On suppose que (u_n) est convergente et (v_n) est divergente . Soit (w_n) la suite définie par $w_n=u_n+v_n$.

1) Montrer que la suite (w_n) est divergente.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n^2+1}$.

Démontrer que (u_n) est divergente.

Limites et comparaison

Ex 1-11 : ***Théorème de comparaison ou d'encadrement***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\dfrac{3\sin(n)}{n^2}$

2) $u_n=\dfrac{3+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$

3) $u_n=3(-1)^n+n$

4) $u_n=\dfrac{2\cos(n)}{n}+\dfrac{\sin(n)}{2n}$

5) $u_n=\dfrac{5n+(-1)^{n+1}}{2n+(-1)^n}$

6) $u_n=-3n^3+3\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Ex 1-12 : ***Passage à la limite***

On considère la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n , $v_n\leqslant\dfrac{-n+1}{n+4}$

On suppose que la suite (v_n) est convergente.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\leqslant-1$

Limite d'une suite géométrique

Ex 1-13 :

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.

2) $u_n = 1{,}00001^n$

3) $u_n = 3 + \left(\frac{11}{12}\right)^n$

4) $u_n = \left(-\frac{8}{5}\right)^n$

5) $u_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{11}{12}\right)^n$

6) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{5}{4}\right)^k$

7) $u_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$

8) $u_n = \frac{e^n - 4^n}{4^n - 1}$

9) $u_n = \frac{2^{n+1} + 5^{2n}}{5^{2n-3}}$

Ex 1-14 : ***Nombre rationnel***

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3{,}777777\ldots$ (n chiffres 7)
$u_1 = 3{,}7$, $u_2 = 3{,}77$ …
Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

2) Montrer que 2,47474747… est un nombre rationnel.

Suites arithmético-géométriques

Ex 1-15 :

On considère la suite arithmético-géometrique (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1}=0{,}5\,u_n+1{,}5 \\ u_0=1 \end{cases}$

1) Représenter graphiquement les 4 premier termes de la suite (u_n) .

2) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

3) Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle renvoie le terme de rang n de la suite (u_n) .

```
def u(n):
    u= ……….
    for i in range ( ….. , ….. ):
        u=……….
    return ……….
```

4) En utilisant la fonction Python ci-dessus, retrouver le résultat conjecturé à la question 2.

Suites arithmético-géométriques et problèmes

Ex 1-16 : ***Baccalauréat ES Amérique du Sud nov 2019 – Ex 1-2***

Suites arithmético-géométriques - Algorithme de seuil

Au 1er janvier 2018, un arboriculteur possède 5 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1er janvier de l'année $(2018+n)$.

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5000$ et $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 300$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.
Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1er janvier 2020?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7500$, pour tout entier naturel n.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7500 - 2500 \times 0{,}96^n$.

3. La superficie des terrains de l'arboriculteur lui permet d'avoir au maximum 6 000 pommiers. L'arboriculteur voudrait savoir en quelle année il devra acquérir un autre terrain pour pouvoir planter de nouveaux pommiers.
On considère l'algorithme ci-dessous

```
1  n=0
2  u=5000
3  while ( ……….. ):
4      n=n+1
5      u=………..
```

a. Recopier et compléter les lignes 3 et 5 de cet algorithme afin qu'il réponde à la problématique énoncée ci-dessus.

b. Quelle est la valeur de la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Si l'évolution se poursuit toujours selon ce modèle, vers quelle valeur va tendre à terme le nombre de pommiers de cet arboriculteur? Justifier la réponse.

Ex 1-17 : ***Baccalauréat ES Antilles-Guyanne sept 2017 – Ex 1-2***

Suites arithmético-géométriques

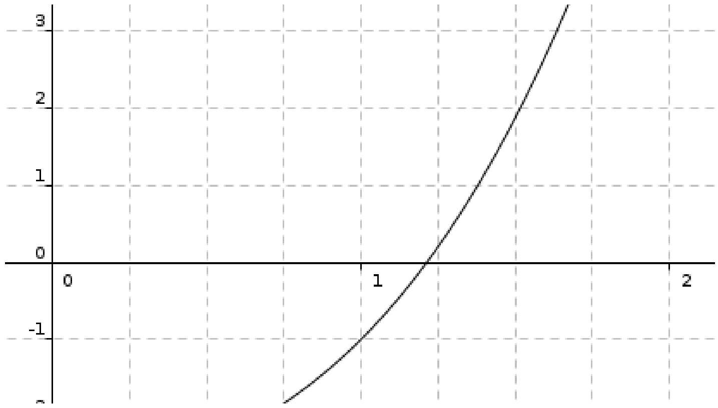
Une petite ville dispose d'un service municipal de location de vélos. La municipalité souhaite être informée sur le nombre de vélos en circulation et le coût engendré.
Le responsable du service de location de vélos constate que, chaque année, 20 % des vélos sont devenus inutilisables car perdus, volés ou détériorés. Le budget alloué au service lui permet de racheter 30 vélos par an.
Le 1er janvier 2017, le parc contient 200 vélos utilisables.
On modélise l'évolution du nombre de vélos utilisables par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le nombre de vélos le 1er janvier de l'année $2017+n$.
Ainsi $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 30$.

1. **a.** Justifier le coefficient 0,8 dans l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
   b. Combien y aura-t-il de vélos dans ce parc au 1er janvier 2018?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 150$ pour tout entier naturel n.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0.
   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 50 \times 0,8^n + 150$.
   d. La municipalité a décidé de maintenir ce service de location tant que le nombre de vélos reste supérieur à 160.
   En quelle année le service de location s'arrêtera-t-il?
3. Pour l'aider à maintenir le service de location, la municipalité a obtenu une subvention de la région qui sera versée de 2017 inclus à 2025 inclus. Par commodité, on suppose qu'elle est versée pour chaque année le 1er janvier, de 2017 inclus à 2025 inclus.
   Cette subvention s'élève à 20 euros par vélo disponible à la location.
   a. Justifier que la somme des subventions reçues pour les deux premières années s'élève à 7 800 euros.
   b. Déterminer la somme totale perçue grâce à cette subvention du 1er janvier 2017 au 1er janvier 2025.

Algorithme

Ex 1-18 : Méthode de Newton-Raphson

1) **Introduction :**
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On constate que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont nous allons déterminer une valeur approchée.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0 = \frac{3}{2}$.
T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A .
Déterminer l'abscisse x_1 de A .

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 . Que dire de x_2 ?

2) **Mise en place de l'algorithme :**
Revenons sur le cas général.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=0$ admette une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et telle que la dérivée ne s'annule pas.
On note C_f sa courbe représentative et x_0 un réel.

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir la suite (x_n) des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$.
Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs la suite (x_n) jusqu'à $n = 10$.

```
from math import *

N=int(input("N="))
x_0=float(input("x_0="))

def f(x):
    return (……………...)

def f_prime(x):
    return (……………...)

def MethodeNewton(x_0, N):
    x=……………...
    for i in range(……………...):
        x.append(……………...…...……………...)
    return x

print(MethodeNewton(x_0,N))
```

Tester ce programme pour différente valeur de x_0 . Que constatez-vous ?

d) On se propose maintenant pour éviter les calculs inutiles de stopper le programme quand la différence entre deux termes consécutifs de la suite est inférieure à une précision p.

Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```
from math import *

x_0=float(input("x_0="))
p=float(input("p="))

def f(x):
    return (……………...)

def f_prime(x):
    return (……………...)

def MethodeNewton(x_0,p):
    x=……………...
    i=……………...
    x.append(x[0] - f(x[0])/f_prime(x[0]))
    while (……………...……………...>p):
      i=……………...
      x.append(……………...……………...)
    return x

print(MethodeNewton(x_0,p))
```

3) **Application :**

Déterminer les fonctions à utiliser pour déterminer avec ce programme des valeurs approchées à 10^{-10} près : (puis donner ces valeurs approchées)

- de π

- de e

- de $\sqrt{2}$

- du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (solution de $x^2 = x + 1$)

<u>Attention :</u>
Dans le cas où l'équation $f(x) = 0$ admet plusieurs solutions, il faut choisir une valeur de x_0 proche de la solution attendue, afin que l'algorithme converge bien vers cette solution . Il faut aussi tout faire pour que la dérivée ne s'annule pas …

Testez le programme **MethodeNewton.py** (ouvrir le fichier texte et le copier dans EduPython) afin de visualiser la méthode de Newton.