# LIMITES DE SUITES

Étudier la limite d'une suite $(u_n)$, c'est examiner le comportement des termes $u_n$ lorsque $n$ prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$.

## 1 ) LES DIFFÉRENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite $(u_n)$.

**cas 1**

Intuitivement, si *« $u_n$ est aussi grand que l'on veut dès que $n$ est assez grand »*, alors on dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

**De manière plus mathématique :**

Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

**Exemple :** $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

**cas 2**

Intuitivement, si les termes $u_n$ finissent par être négatifs et ***« si $u_n$ est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que $n$ est assez grand »***, alors on dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

**De manière plus mathématique :**

Tout intervalle de la forme $]-\infty\,; A[$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

**Exemple :** $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$

**Remarque :** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$

**cas 3** (suite convergente)

Soit $L$ un réel donné.

Intuitivement, dire que $(u_n)$ a pour limite $L$, signifie que lorsque $n$ est de plus en plus grand, **« les nombres $u_n$ correspondants viennent s'accumuler autour de $L$ ».**

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

**De manière plus mathématique :**

Tout intervalle ouvert contenant $L$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

**Exemple :** $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

**Remarque :**

Si une suite $(u_n)$ a une limite finie $L$, alors la limite $L$ est unique.

**cas 4**

Aucun des trois cas ne se produit.

**Exemple :**

La suite $(u_n)$ définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et -1.
Ainsi $(u_n)$ n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

**Remarque :** Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1 , cas 2 , cas 4)

## 2 ) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux, sont admis.
Pour la plupart d'entre eux , ils sont naturels mais … comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.
On note par un point d'interrogation « ? » les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées . Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

- **Limite de la suite de terme général $k \times u_n$ (où $k$ est un réel donné)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ | $L$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} (k \times u_n)$ ( avec $k > 0$ ) | $kL$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} (k \times u_n)$ ( avec $k < 0$ ) | $kL$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Exemple :** Soit la suite $(w_n)$ définie par $w_n = 5\,n^2$

On a $w_n = 5\,u_n$ où $u_n = n^2$

Comme $5 > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

- **Limite de la suite de terme général $u_n + v_n$**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $L$ | $L$ | $L$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$ | $L+L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? |

**Exemple :** Soit la suite $(w_n)$ définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n = 5n^2 + \dfrac{1}{n}$

On a $w_n = u_n + v_n$ où $u_n = 5n^2$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on en déduit par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

- **Limite de la suite de terme général $u_n \times v_n$**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $L$ | $L>0$ | $L>0$ | $L<0$ | $L<0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$ | $L\times L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? |

**Exemple :** Soit la suite $(w_n)$ définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n = -n^2 \times \left(5n^2 + \dfrac{1}{n}\right)$

On a $w_n = u_n \times v_n$ où $u_n = -n^2$ et $v_n = 5n^2 + \dfrac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on en déduit par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$

- **Limite de la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$**

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $L$ | $L$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $L>0$ ou $+\infty$ | $L>0$ ou $+\infty$ | $L<0$ ou $-\infty$ | $L<0$ ou $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $L'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $L'>0$ | $L'<0$ | $L'>0$ | $L'<0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 en restant positive | 0 en restant négative | 0 en restant positive | 0 en restant négative | $0$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$ | $\dfrac{L}{L'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? |

*Cas où* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$      *Cas où* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

**Remarques :**

- « 0 en restant négative ou positive» signifie qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n>n_0$ , $(v_n)$ garde un signe constant.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ pour indiquer que $(v_n)$ tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^-$ pour indiquer que $(v_n)$ tend vers 0 en restant négative.

**Exemple :** Soit la suite $(w_n)$ définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n = \dfrac{5n^2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

On a $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ où $u_n = 5n^2 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$, on en déduit par quotient que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

## 3 ) LIMITES ET COMPARAISON

**Propriétés : Théorèmes de comparaison en l'infini (TCI)**

Soit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

- Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

**Exemple :** Soit la suite $(w_n)$ définie par $w_n = n-(-1)^n$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $-1 \leqslant -(-1)^n$, donc $n-1 \leqslant n-(-1)^n$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-(-1)^n) = +\infty$

**Propriété : Passage à la limite**

Soit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ qui convergent respectivement vers L et L'.
On suppose que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ .
On a alors $L \leqslant L'$ .

Si une suite $(u_n)$ converge vers L et si pour tout entier naturel $n$ , $u_n \leqslant k$ ( $k \in \mathbb{R}$ ) , alors $L \leqslant k$

**Remarque :** Si dans la propriété précédente, on remplace $u_n \leqslant v_n$ par $u_n < v_n$ , la conclusion reste $L \leqslant L'$

**Exemple :** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ .

Pour tout entier naturel $n$ , on a $u_n < v_n$ .

Et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

**Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement :**

Soit $(u_n)$ , $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$
Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites convergentes de même limite $L$ , alors la suite $(w_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$.

**Exemple :** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ , donc $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

## 4 ) LIMITES DES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

### A ) SUITES ARITHMÉTIQUES

**Propriété :**

Toute suite arithmétique de raison $r$ non nulle est divergente.
- Si $r > 0$ , alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$ , alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

### B ) SUITES GÉOMÉTRIQUES

**Propriété :**

Soit $q$ un réel .
- Si $-1 < q < 1$ , alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ , alors pour tout $n$ , $q^n = 1$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$ , alors la suite $(q^n)$ est divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$ , alors la suite $(q^n)$ est divergente

**Exemple :** La suite $(u_n)$ définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieure à 1 ; elle est donc divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

**Remarque :** On en déduit facilement le cas général $u_0 q^n$ …

**Exemple :**

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_n = -5 \times 2^n$ .
On a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ ; on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

**Propriété :**

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$ , on applique la formule suivante :

$$S_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\mathbf{S = premier\ terme \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}}$$

**Exemple :** Soit $(v_n)$ la suite géométrique définie , pour tout $n \in \mathbb{N}$ , par $v_n = 5 \times 2^n$

On a $S_n = 5 \times \dfrac{1-2^{n+1}}{1-2} = 5 \times 2^{n+1} - 5$

**Propriété :**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $q$ , telle que $0 < q < 1$ . On a :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$$

**Preuve :**

On a $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$ car $0 < q < 1$ , donc par somme $\lim_{n \to +\infty} (1-q^{n+1}) = 1$ et par produit, puis quotient $\lim_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-q}$

## 5 ) SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

**Définition :**

Une suite arithmético-géométrique $(u_n)$ est une suite définie, pour tout entier naturel $n$ , par une formule de récurrence de la forme $u_{n+1} = a u_n + b$ , où $a$ et $b$ sont deux réels.

**Remarques :**

- Si $a = 0$ , la suite est constante et égale à $b$ .
- Si $a = 1$ , la suite est arithmétique de raison $b$ .
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$ , la suite est géométrique de raison $a$ .

**Représentation graphique :**

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 10$ et $u_0 = 1$ . On note $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{2} x + 10$

Étape 1 : On trace la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2} x + 10$

Étape 2 : On trace la droite d'équation $y = x$

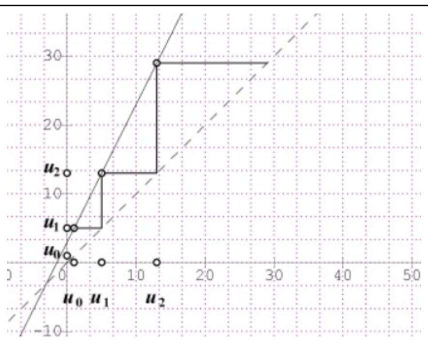
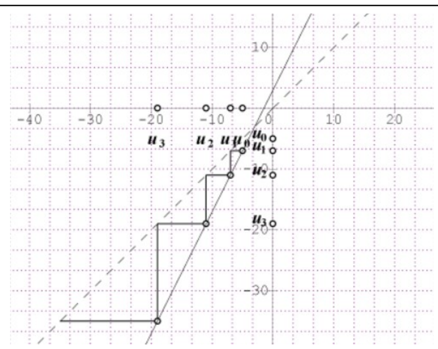
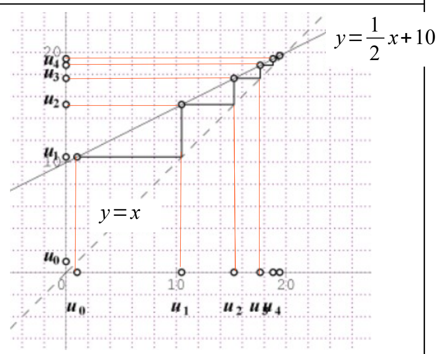
Étape 3 : On place $u_0$ sur l'axe des abscisses

Étape 4 : On place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées

Étape 5 : On reporte $u_1$ sur l'axe des abscisses grâce à la droite d'équation $y = x$

et ainsi de suite … pour obtenir $u_2$ , $u_3$ , $u_4$ ….

Dans la pratique, on ne dessine pas tous les traits de construction et on se contente de mettre en évidence les variations et les limites.

| $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = 1$ | $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $u_0 = -5$ | $u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + 10$ et $u_0 = 1$ |
|---|---|---|
|  |  |  |
| La suite est croissante et $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ | La suite est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ | La suite est croissante et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 20$ <br> 20 est l'abscisse du point d'intersections des deux droites. |

Une suite arithmético-géométrique peut converger vers un réel $L$ ou tendre vers l'infini.