LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS

1) LIMITE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

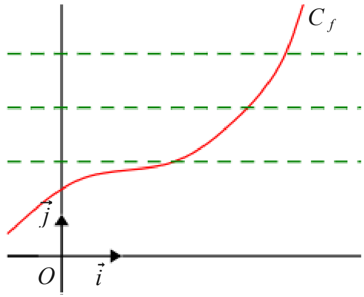
A) LIMITE INFINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel.
Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, ***« les nombres $f(x)$ correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut ».***

On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande , la courbe C_f finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale .

Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
  Tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

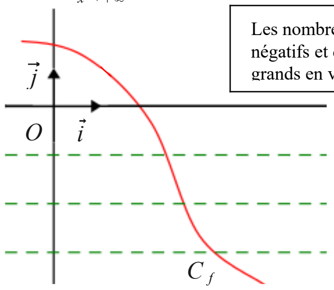
  Pour tout réel $M > 0$, il existe un réel m tel que , si $x > m$, alors $f(x) \in]M\,;+\infty[$

- On dit aussi que la fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

Exemples à connaître :

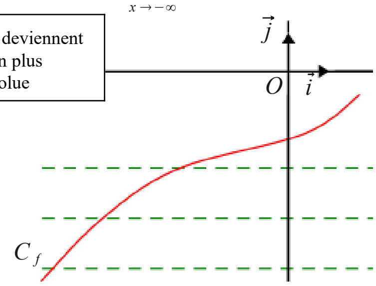
On définit de la même façon …

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

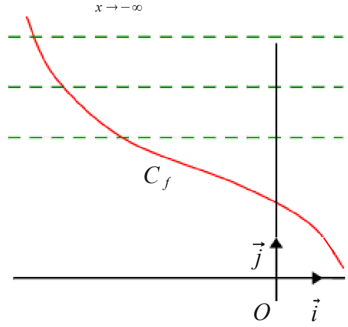


Les nombres $f(x)$ deviennent négatifs et de plus en plus grands en valeur absolue

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



Dans ces deux cas, f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty\,;b]$

Remarque :
Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante :

B) LIMITE FINIE EN $+\infty$ ET EN $-\infty$ ET ASYMPTOTE HORIZONTALE

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel et soit L un réel donné .

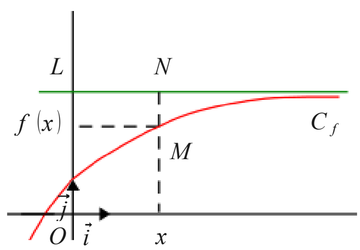
- Intuitivement, dire que f a pour limite L en $+\infty$, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, **« les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L».**

On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

- On dit que la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.

Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0 . La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y = L$.



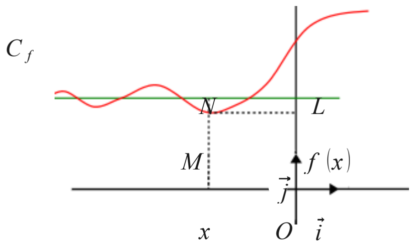
Remarque :
De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
Tout intervalle ouvert contenant L finit par contenir toutes toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

Pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit qu'il soit) il existe un réel m tel que , si $x > m$, alors $f(x) \in]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$.

On définit de la même façon :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

f est définie sur un intervalle de la forme $]-\infty ; b]$



La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$.

La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $-\infty$.

Exemples à connaître :

Remarque :

Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand x tend vers $+\infty$. (Par exemple $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \cos x$ …)

2) LIMITE EN *a* (avec *a* réel)

Lorsque que l'on définit la limite d'une fonction f en un réel a , on considère que :

- $a \in D_f$
- ou a est une borne de D_f

A) LIMITE INFINIE EN *a* ET ASYMPTOTE VERTICALE

Définition :

Soit f une fonction.

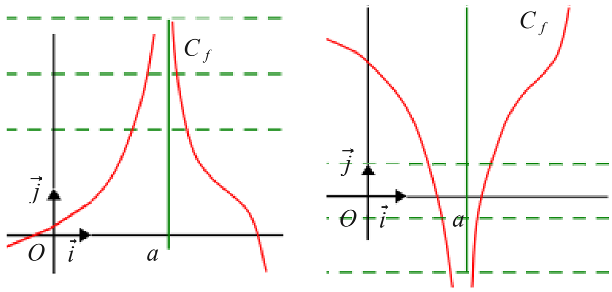
- Intuitivement, dire que f a pour limite $+\infty$ en a , signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a, ***« les nombres $f(x)$ correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut ».***

On note :

$$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f.



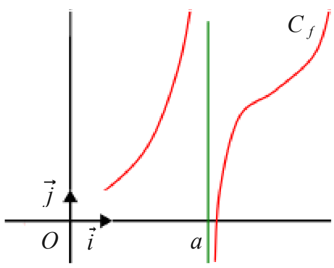
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , la courbe Cf finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale .

Remarque :

Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites *«d'un seul côté de a».*

Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en *a*** et de **limite à gauche en *a*** et on note :

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$



Dans ce cas

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

Exemples :

B) LIMITE FINIE EN a

On a déjà vu la notion de limite finie en zéro dans le chapitre sur la dérivation en 1S.
La notion de limite finie en a est identique …

Définition :

Soit f une fonction telle que a soit dans son ensemble de définition Df ou soit une borne de Df et soit L un réel donné.
Intuitivement, dire que f a pour limite L en a, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a « **les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L** ».

On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive …) :
  Tout intervalle ouvert contenant L finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$. On écrit aussi :

  Pour tout $(\varepsilon > 0)$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon\,;\,L+\varepsilon[$.

- On admet que si une fonction f est définie en a et si f admet <u>une</u> limite finie en a , alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

  C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles, de la fonction racine carrée, des fonctions sinus et cosinus, des fonction logarithmes et exponentielles … et des composées de ces fonctions.

  Cette remarque nous permet de déterminer rapidement la limite d'une telle fonction en tout point de son ensemble de définition.

  Exemples :

Attention : Comme nous le verrons en exercice, toutes les fonctions n'admettent pas forcément <u>une</u> limite finie en tout point de leur ensemble de définition. (*la limite à droite et la limite à gauche peuvent être différentes…*)

3) OPÉRATION SUR LES LIMITES

Ces opérations sont identiques à celles déjà vues avec les suites.
Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux sont admis.
Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais … comme souvent en math, il y a quelques cas particuliers.

Par convention et pour simplifier :

- on note $\lim f$ et $\lim g$ les limites de f et de g , toutes les deux en a , en $+\infty$ ou en $-\infty$
- on note par un point d'interrogation (?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
  On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées . Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

- **Limite de kf (où k est un réel donné)**

$\lim f$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf$ (avec $k>0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim kf$ (avec $k<0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g : x \longmapsto -\dfrac{2}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

On a $g = -2f$ avec $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$

- ***Limite de $f+g$***

$\lim f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f+g)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h : x \longmapsto \sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

On a $h = f + g$ avec $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto -\dfrac{2}{x^2}$

- **Limite de** $f \times g$

lim f	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
lim g	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
lim $(f \times g)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h: x \longmapsto (x+2)\sqrt{x}$ . . Calculer $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

On a $h = f \times g$ avec $f: x \longmapsto x+2$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$

- **Limite de** $\dfrac{f}{g}$

lim f	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
lim g	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
lim $\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où la limite de g n'est pas nulle — *Cas où la limite de g est nulle*

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive » signifie que g garde un signe constant au voisinage de a , en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas.
- On note $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^+$ pour indiquer que $g(x)$ tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0^-$ pour indiquer que $g(x)$ tend vers 0 en restant négative.

Exemple : Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h: x \longmapsto \dfrac{2x-4}{\sqrt{x}}$. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$

On a $h = \dfrac{f}{g}$ ou $f: x \longmapsto 2x-4$ et $g: x \longmapsto \sqrt{x}$

4) CONTINUITÉ DES FONCTIONS

Définition :

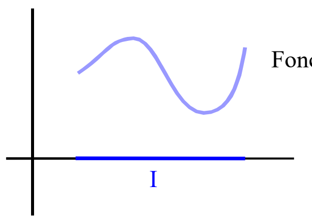
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit a un réel appartenant à I . On dit que f est continue en a, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur I, si f est continue en tout réel a de I.

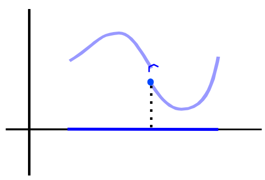
Remarque :

Graphiquement, si on peut tracer la courbe d'une fonction sur un intervalle *I* sans lever le stylo de la feuille, alors on peut dire que la fonction est continue.

Une fonction n'est pas continue en un réel *a* lorsque la courbe a une discontinuité en *a*, elle fait un "saut".



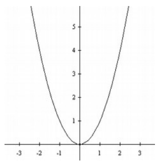
Fonction continue



Fonction discontinue en a

Exemple 1 :

- La fonction $x \longmapsto x^2$ est une fonction continue en tout réel a de $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.



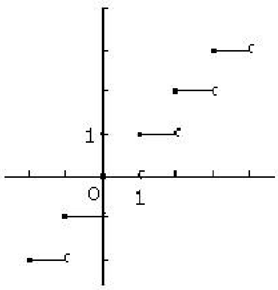
  On peut le justifier en démontrant que $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, c'est-à-dire en démontrant que x^2 est aussi proche que l'on veut de a^2 lorsqu'on prend x assez proche de a.

  La parabole représentant la fonction $x \longmapsto x^2$ peut être tracée sans lever le stylo de la feuille.

Exemple 2 :

- Considérons la fonction $x \longmapsto \mathrm{E}(x)$ appelée fonction "Partie entière" et qui, à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.

  E(2,5) = 2 E(-2,4) = -3 E(1,9999) = 1 E(2) = 2



  Si n est un nombre entier, alors $\mathrm{E}(n) = n$ et pour tout $x \in [n ; n+1[$, on a $\mathrm{E}(x) = n$

  Cette fonction n'est pas continue en n avec $n \in \mathbb{Z}$
  En effet lorsque x est très proche de n par valeurs inférieures, E(x) n'est pas très proche de E(n).

  La fonction **"Partie entière"** est une fonction dite **"en escalier".**
  La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.

  Notations courantes : - calculatrices : int(x) floor(x) partEnt(x) int x
  - tableur : ent()

5) CONTINUITÉ DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

Propriété :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, les fonction logarithmes et exponentielles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Remarques :

- Les démonstrations de ces propriétés se font en utilisant les propriétés des limites.
- La plupart des fonctions qui seront étudiées seront des fonctions continues.
- Il est convenu que, dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

6) DÉRIVABILITÉ ET CONTINUITÉ

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Attention :

7) THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

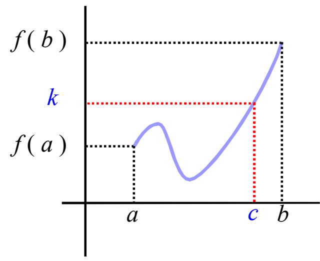
Propriété : *admise*

Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I ,et a et b deux réels de I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

L'équation $f(x)=k$ a **au moins** une solution c comprise entre a et b.



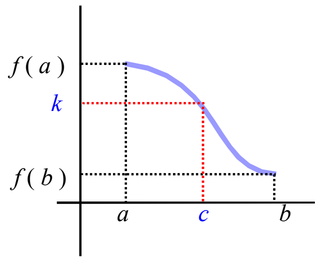
Propriété : ***Corollaire du théorème** des valeurs intermédiaires ou théorème des bijections*

Soit f une fonction définie, **continue et strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou entre $f(b)$ et $f(a)$) , il existe **un et un seul** réel c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.

Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :

L'équation $f(x)=k$ a **une unique** solution c comprise entre a et b.



Remarques :

- Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle .

Par exemple :

- Si f est une fonction définie, continue et strictement croissante sur $]a\,;b]$, alors pour tout réel k dans l'intervalle
  l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $]a\,;b]$.

- Si f est une fonction définie, continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;a[$, alors pour tout réel k dans l'intervalle
  l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $]-\infty\,;a[$.

Attention :

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$ et si $f(a)f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ a une solution et une seule sur $[a\,;b]$

- Les théorèmes précédents permettent de démontrer **l'existence** d'une ou de plusieurs solutions à une équation, mais ils ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions.

*On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant des algorithmes (**Méthode de balayage, méthode de dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton**) ou les outils de résolution numérique d'une équation des calculatrices (basés sur la méthode de Newton).*