- LIMITES ET CONTINUITÉ DES FONCTIONS - MATH COMP chapitre 2 : L'ESSENTIEL DU COURS

http://pierrelux.net

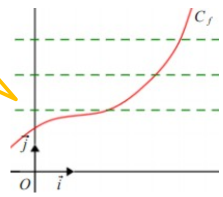
Limites infinie en l'infini :

Géométriquement :
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grande , la courbe finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale .

Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$

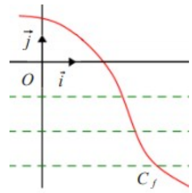
Pour tout réel $M>0$, les nombres $f(x)$ finissent par se retrouver dans l'intervalle $]M;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$



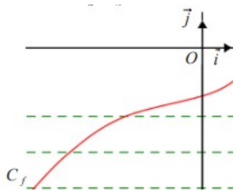
f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$



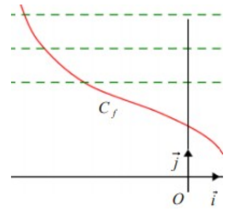
f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$



f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$



f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$

De la même façon ….

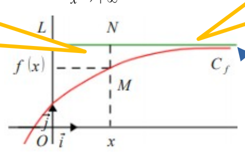
Limites finie en l'infini :

Géométriquement :
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance MN tend vers 0 . La courbe C_f se rapproche sans cesse de la droite d'équation $y=L$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

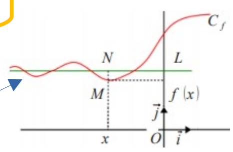
Pour tout $\varepsilon>0$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon;L+\varepsilon[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$



en $+\infty$

en $-\infty$



f a pour limite L quand x tend vers $+\infty$

f a pour limite L quand x tend vers $-\infty$

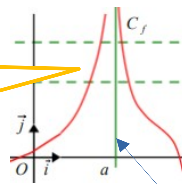
Asymptote horizontale :

La droite d'équation $y=L$ est **asymptote <u>horizontale</u>** à la courbe C_f en $+\infty$. (ou en $-\infty$)

Limite infinie en un réel a :

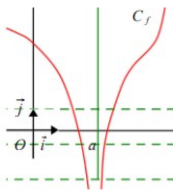
Géométriquement :
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de a , la courbe C_f finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$



f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

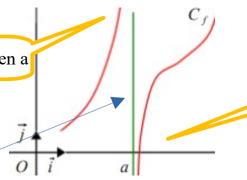


f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

Limite à gauche en a

Limite à droite en a



f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a par valeurs inférieurs à a
f a pour limite $-\infty$ quand x tend vers a par valeurs supérieures à a

Asymptote verticale :

la droite d'équation $x=a$ est **asymptote <u>verticale</u>** à la courbe C_f

Limite finie en un réel a :

$a\in D_f$ ou est une borne de D_f

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

Pour tout $(\varepsilon>0)$ (aussi petit qu'il soit) les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$

Opérations sur les limites :

Ces opérations sont identiques à celles déjà vues avec les suites.

Attention aux formes indéterminées : « $+\infty-\infty$ » « $0\times\infty$ » « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » « $\dfrac{0}{0}$ »

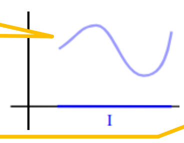
Continuité :

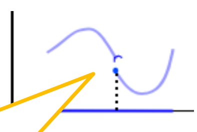
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit a un réel appartenant à I . On dit que f est **continue en a** , si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
- On dit que f est continue sur I, si f est **continue** en tout réel a de I.

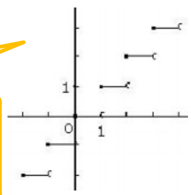
Graphiquement, si on peut tracer la courbe d'une fonction sur un intervalle I sans lever le stylo de la feuille, alors on peut dire que la fonction est continue.





Une fonction n'est pas continue en un réel a lorsque la courbe a une discontinuitéen a, elle fait un "saut".

Un exemple fameux de fonction non continue :
La fonction "Partie entière" (qui à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x) est une fonction dite "en escalier". La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.



Dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est continue et strictement monotone.

Fonctions de référence :

La plupart des fonctions qui seront étudiées en terminale seront des fonctions continues.

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, les fonction logarithmes et exponentielles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Dérivabilité et continuité :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

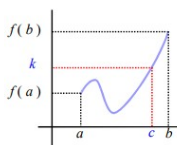
La réciproque de la propriété est fausse :
la fonction racine carrée est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

Ces théorèmes permettent de démontrer **<u>l'existence</u>** d'une ou de plusieurs solutions d'une équation, mais ils ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions.
On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant des algorithmes (**Méthode de balayage, méthode de dichotomie, méthode de la sécante, méthode de Newton**) ou les outils de résolution numérique d'une équation des calculatrices (basés sur la méthode de Newton)

TVI :

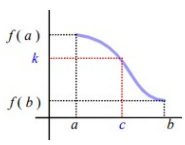
Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I , et a et b deux réels de I.



Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$

Corollaire du TVI :

Soit f une fonction définie, **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a\,;b]$.



Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ou entre $f(b)$ et $f(a)$ si f est strictement décroissante) , il existe **un unique réel** c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.