Thèmes d'étude :

Modèles définis par une fonction d'une variable

Limites de fonctions

Ex 2-1 : ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, alors :

a) Il existe un réel x tel $f(x)>10^9$

b) Pour tout réel A , il existe un réel m , tel que si $x>m$, alors $f(x)>A$

c) Il existe un réel m , tel que pour tout réel A si $x>m$, alors $f(x)>A$

d) $\exists m\in\mathbb{R}$, tel que $x>m \Rightarrow f(x)>10^4$

2) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-0{,}001$, alors il existe un intervalle de la forme $]m;+\infty[$ sur lequel f est strictement négative.

4) Si f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

Ex 2-2 : ***Comprendre la définition***

Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=5$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Ex 2-3 : ***Conjecturer une limite – piéger la calculatrice***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1) $f:x\longmapsto 10^{-3}x^2-10^2x$

2) $g:x\longmapsto \dfrac{3x^2-2}{10^3x-4}$

3) $h:x\longmapsto 10x^3-0{,}01x^4$

Ex 2-4 : ***Limite et position relative par rapport à une droite***

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Si C se situe au-dessus de la droite d'équation $y=1$, les résultats suivants sont-ils possibles ?

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Limite en *a* (avec *a* réel)

Ex 2-5 : ***Comprendre la définition***
Traduire les limites ci-dessous à l'aide d'une phrase du type « Tout intervalle … finit par contenir toutes les valeurs $f(x)$ pour x ... »

a) $\lim_{x\to4} f(x)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$

c) $\lim_{x\to 4} f(x)=-\infty$

d) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=4$

Ex 2-6 : ***Vrai ou faux***

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) Si $\lim_{x\to -1} f(x)=+\infty$, alors $d: y=-1$ est asymptote horizontale à C en $+\infty$.

2) Si $\lim_{x\to -1} f(x)=+\infty$, alors $d: y=-1$ est asymptote verticale à C.

3) Si $\lim_{x\to -1} f(x)=+\infty$, alors $d: x=-1$ est asymptote verticale à C.

Ex 2-7 : ***Conjecturer une limite***

En utilisant la calculatrice ou un tableur, conjecturer les limites suivantes :

1) en -1, si elle existe, de $f: x\longmapsto \frac{3}{(x+1)^2}$

2) en 9, si elle existe, de $f: x\longmapsto \frac{x}{\sqrt{x}-3}$

Ex 2-8 : ***Asymptotes***

Soit C la courbe représentative d'une fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Déduire, si possible, des limites suivantes l'équation d'une asymptote à la courbe C .

a) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=3$

c) $\lim_{x\to 1-} f(x)=+\infty$

d) $\lim_{x\to 4} f(x)=-\infty$

e) $\lim_{x\to 2} f(x)=3$

f) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=5$

Opérations sur les limites

Ex 2-9 : ***Vrai ou faux***

1) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=1$

2) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to +\infty} f(x)\times g(x)=+\infty$

3) Si $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=0$

Ex 2-10 : ***Calculs de limites***

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x}+x+\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim_{x\to 0+} \left(3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}+3x\right)$

3) $\lim_{x\to +\infty} \left(3-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}+3x\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{x^3}{6-3x}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x + 1 + \dfrac{1}{x^2} \right)$

6) $\lim\limits_{x \to -\infty} (4-x^2)(2x-4)$

7) $\lim\limits_{x \to 4+} \left(3x - 1 + \dfrac{1}{x-4} \right)$

8) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 - \dfrac{1}{x^2} \right)$

9) $\lim\limits_{x \to 2+} \left(4 - x^2 + \dfrac{4}{4-x^2} \right)$

10) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{-x} - \dfrac{2}{1-2x} \right)$

Ex 2-11 : ***Formes indéterminées***

1) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 3$

2) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ telles que :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) g(x)) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) g(x)) = 3$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) g(x)) = -\infty$

3) Donner deux fonctions f et g vérifiant $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ telles que :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$

c) $\dfrac{f}{g}$ n'a pas de limite finie en 0.

Ex 2-12 : *Logique*

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $\lim_{x \to +\infty} f(x)=0$.
Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1) Pour que $\lim_{x \to +\infty} (f(x)g(x))=0$, il faut que $\lim_{x \to +\infty} g(x)=0$

2) Pour que $\lim_{x \to +\infty} (f(x)g(x))=0$, il suffit que $\lim_{x \to +\infty} g(x)=0$

Ex 2-13 : *Fonctions polynômes*

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré

1) Montrer la propriété ci-dessus pour le polynôme
$P(x)=-8x^3+14x^2+8x+4$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des polynômes :

a) $Q(x)=\frac{x^5}{4}-\frac{x^3}{2}$

b) $R(x)=1-4x+5x^2$

Ex 2-14 : *Fonctions rationnelles*

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$ une fonction rationnelle a même limite que la fonction formée par le quotient des monômes de plus haut degré.

1) Montrer la propriété ci-dessus pour la fonction rationnelle
$f(x)=\frac{3x+2}{4x^2-5}$

2) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles :

a) $g(x)=\frac{x^3-4x^2-5}{2x^3-5}$

b) $h(x)=\frac{(x-5)^4}{(3x^2-5)^2}$

Ex 2-15 : ***Asymptotes***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ -{-2;2} par $f(x)=\dfrac{3x-7}{x^2-4}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire les équations des éventuelles asymptotes à C_f la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Ex 2-16 : ***Déterminer a, b et c ...***

Soit $f:x\longmapsto a+\dfrac{b}{x-c}$ où a , b et c sont des réels et dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	-1	↘	-4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

1) En observant le tableau, quel réel parmi a , b et c peut-on obtenir sans calcul ? Le donner .

2) À partir de l'expression $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
Quel deuxième réel cherché obtient-on ?

3) Déterminer le troisième réel cherché et vérifier les réponses en traçant la courbe représentative de f .

Ex 2-17 : ***Lever l'indéterminée***

Déterminer les limites suivantes, après avoir levé l'indéterminée :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x+2}$

Ex 2-18 : ***Limite d'une fonction composée***

Déterminer intuitivement, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$

2) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$

3) $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{\frac{9x+2}{x-3}}$

<u>Ex 2-19 :</u> ***Théorèmes de comparaison***

Les théorèmes de comparaison non détaillés en maths complémentaires sont identiques (en adaptant les limites) à ceux vus pour les suites.

Soit f la fonction définie sur $[5;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\sqrt{x-5}}{x}$.

1) Démontrer que pour tout $x \geqslant 5$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ (aide : $0 \leqslant x-5 \leqslant x$)

2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

<u>Continuité : maîtriser le cours</u>

<u>Ex 2-20 :</u> ***Vrai ou faux***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Si f est continue sur I , alors :

1) On peut tracer une tangente non verticale en tout point de C .

2) f est une fonction qui ne change pas de sens de variation.

3) C se trace sans lever le crayon.

4) L'intervalle I est fermé.

5) La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$

6) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

7) La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.

<u>Justifier la continuité d'une fonction sur un intervalle</u>

<u>Ex 2-21 :</u>

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle I indiqué.

1) $f : x \longmapsto \sqrt{3-x}$ sur $I=]-\infty;3[$

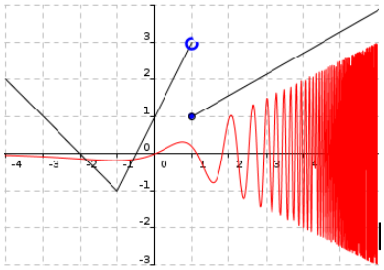
2) $f : x \longmapsto 2e^x+\frac{3}{x}$ sur $]0;+\infty[$

3) $f : x \longmapsto \frac{3x^3}{1-3x}$ sur $I=\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

Continuité et représentation graphique

Ex 2-22 :

1) Déterminer graphiquement si les fonctions dont les courbes représentatives sont données ci-dessous sont continues sur l'intervalle $[-4;6]$.



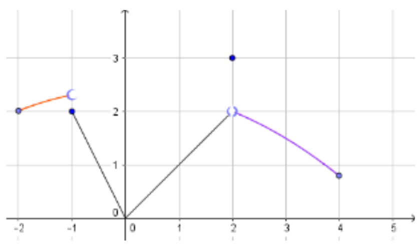
2) Représenter avec un traceur de courbes la fonction

$f : x \longmapsto \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}$. f est-elle continue sur]0;1] ?

Essayer de tracer f à la main sans lever le crayon . Que peut-on conclure ?

Ex 2-23 :

On a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2;4]$.



1) La fonction f est-elle dérivable en -1,5 :

en 0 :

en 2 :

2) La fonction f est-elle continue sur $[-2;2]$:

sur $[-2;-1]$:

sur $[-2;-1[$:

3) Déterminer :

$\lim\limits_{x \to 2+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$

La fonction f est-elle continue en 2 ?

Théorème des valeurs intermédiaires

Ex 2-24 : ***Maîtriser le cours - Vrai ou faux***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1) Si f change de signe sur I, alors f s'annule sur I.

2) Si $\mathrm{I}=[a;b]$, $f(a)f(b)>0$ et f est continue sur I, alors f s'annule sur I.

3) Si f s'annule une unique fois sur I et f est strictement monotone sur I, alors f est continue sur I.

4) Si f s'annule une unique fois sur I et f est continue sur I, alors f est strictement monotone sur I.

Ex 2-25 : ***Utilisation de la calculatrice***

1) Montrer que l'équation $(\mathrm{E}) : \dfrac{x^3}{x+1}=8$ admet au moins une solution sur $[-4;-1{,}5]$.

2) Vérifier avec la calculatrice et essayer avec la calculatrice de donner des valeurs approchées de toutes les solutions sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ de l'équation (E)

On peut **conjecturer graphiquement** le nombre de solutions et un encadrement de chacune d'elles . On peut utiliser **les outils graphiques** proposés par la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées ou utiliser les fonctions **nSolve() ou Solve()** .

- **Solve() :** fonction de calcul formel .
Elle cherche à appliquer divers algorithmes permettant de résoudre certains types d'équations prédéfinis (équations linéaires, du 2nd, du 3ème ou du 4ème degré, équation avec des racines carrées se ramenant aux types précédents, équations avec des 'cos' et 'sin', etc.)

- **nSolve() :** fonction fournissant une valeur approchée par la méthode de Newton-Raphson.
Par nature, cette fonction ne peut retourner qu'une seule solution même s'il en existe plusieurs. Elle peut aussi ne rien retourner du tout (plus exactement, elle retourne 'false', voire retourner un résultat erroné dans les (rares) cas où la méthode de Newton ne converge pas.
Suivant l'outil utilisé (Ti-Nspire …) , il est possible de préciser l'intervalle sur lequel la solution est cherchée.

Ex 2-26 : ***Signe de f(x)***

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

- Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -4 et 3.

- Les solutions de l'équation $f(x)=-2$ sont -9 et 4

- $f(0)=2$

Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 2-27 : ***Signe de f(x)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$		-2		0			$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖	$+\infty$	↘	$-\infty$

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;0[$?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]0;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 2-28 : ***Signe de f(x)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$		-5		3			$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$	↘	0

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;3[$?
A quel intervalle appartient chacune d'elle ?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]3;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

<u>Ex 2-29 :</u> *f(x)=k : discussion suivant les valeurs de k*

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		3		1
		-2		-1	

1) Déterminer les extrema de f .

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?

3) Déterminer le signe de f .

4) Discuter suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

<u>Ex 2-30 :</u> *Tableau de variation de f à partir du tableau de variation de f'*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la fonction dérivée f' (f' étant continue) admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'		3	
	$-\infty$		$-\infty$

Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire les variations de f .