CALCULS DE DÉRIVÉES : RAPPELS ET COMPLÉMENTS

1) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ : RAPPELS

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$.

Définition : Nombre dérivé

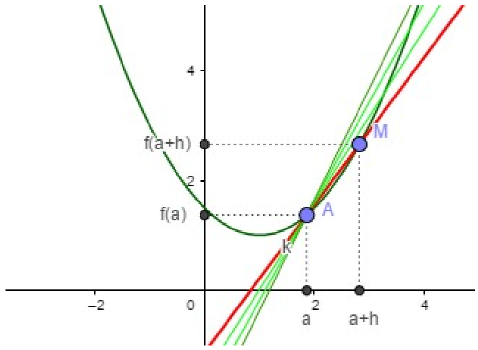
Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel L, revient à dire que le taux de variation de f en a, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a: $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Soit M le point de C_f d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe.
Si f est dérivable en a, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A.



Propriété : Équation de la tangente

Si f est dérivable en a, la courbe C_f admet au point $A(a\,;f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de la tangente en ce point est: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Cas particuliers importants :

- Si $f'(a)=0$, C_f admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y=f(a)$.
- Si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) , f n'est pas dérivable en a, mais C_f admet une tangente verticale d'équation $x=a$.

Définition : Fonction dérivée

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I\subset D_f$) si pour tout x appartenant à I, le nombre dérivé de f en x existe.

La fonction dérivée de f sur I est la fonction, notée f', qui, à tout x de I, associe le réel $f'(x)$.

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Par abus de langage, on dit que f' est « la dérivée de f »

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

2) DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION : RAPPELS

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- Si pour tout x de I, $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

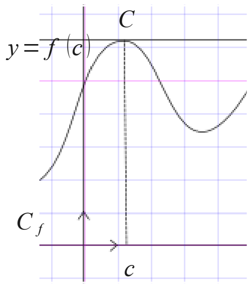
Remarques :

- Si la dérivée f' est strictement positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si la dérivée f' est strictement négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** I et c un réel de I.

Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$



Conséquences graphiques:

On a $f'(c) = 0$, ainsi le coefficient directeur de la tangente à C_f en C est nul.

La tangente est horizontale.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I.

Si la dérivée f' **s'annule** en c en **changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I.

3) FORMULES DE DÉRIVÉES

DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Fonction f	**Fonction dérivée f'**	**Ensemble de dérivabilité**
$f : x \longmapsto k \ (k \in \mathbb{R})$	$f' : x \longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto ax+b$	$f' : x \longmapsto a$	$\mathbb{R}$
$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$f' : x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$ Cette fonction n'est pas dérivable en 0
$f : x \longmapsto x^n \quad n \neq 0 ,\ n \in \mathbb{N}$	$f' : x \longmapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n>0$ $\mathbb{R}^*$ si $n<0$
$f : x \longmapsto e^x$	$f' : x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I (I représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints) et k un réel, alors :

- Les fonctions $k \cdot u$, $u+v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur I et:

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad , \quad (u+v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

- Si pour tout réel a de I, $v(a) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \; .$$

POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

DÉRIVÉE DE $f : x \longmapsto g(ax+b)$

Soit a et b deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I.

Pour tout réel x, tel que $a\,x+b \in I$, la fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable , et on a :

$$f'(x) = ag'(ax+b)$$

DÉRIVÉE DE $\sqrt{u}$

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

DÉRIVÉE DE u^2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = [u(x)]^2$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = 2\,u'(x)\,u(x)$$

DÉRIVÉE DE e^u

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

$$f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$$