Nombre dérivé :

Le nombre dérivé est noté $f\,'(a)$, et on a :

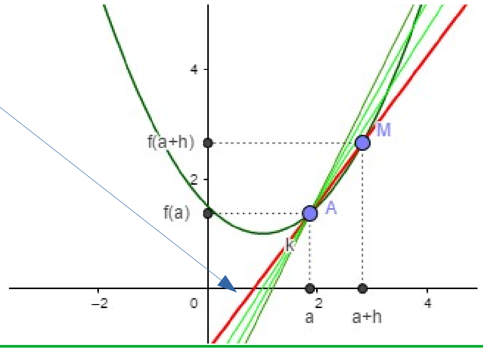
$$f\,'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ (si la limite existe, on dit alors que f est **dérivable** en a)

Interprétation géométrique :

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

La tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe. (h tend vers 0)

Si f est dérivable en a, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f\,'(a)$, et passe par A.



Équation de la tangente :

au point $\mathrm{A}(a;f(a))$

$y=f\,'(a)(x-a)+f(a)$ (Si f est dérivable en a)

Cas particuliers:

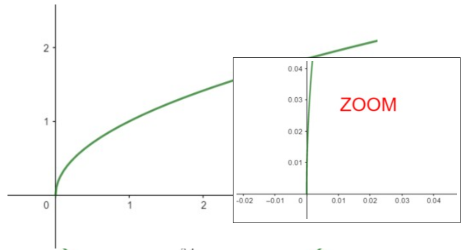
- Si $f\,'(a)=0$, C_f admet au point d'abscisse a **une tangente horizontale** d'équation $y=f(a)$.

Fonction non dérivable :

- Si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=+\infty$ (ou $-\infty$) , f n'est pas dérivable en a

  C_f admet **une tangente verticale** d'équation $x=a$.

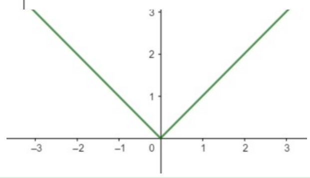
  Exemple classique de la fonction racine carrée en 0
  la droite d'équation $x=0$ est tangente verticale à la courbe à l'origine du repère.



$$|x|=\begin{cases}x\text{ si }x\geqslant 0\\ -x\text{ si }x\leqslant 0\end{cases}$$

- Si C_f admet une pointe au point d'abscisse a alors la fonction n'est pas dérivable en a .

  Exemple classique de la fonction valeur absolue en 0



Formules :

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si pour tout x appartenant à I, le nombre dérivé de f en x existe.

Fonction f	**Fonction dérivée $f\,'$**	**Ensemble de dérivabilité**
$f:x\longmapsto k\ (k\in\mathbb{R})$	$f\,':x\longmapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto x$	$f\,':x\longmapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto\sqrt{x}$	$f\,':x\longmapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f:x\longmapsto x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$f\,':x\longmapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f:x\longmapsto\dfrac{1}{x}$	$f\,':x\longmapsto-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f:x\longmapsto\dfrac{1}{x^n}\ (n\in\mathbb{N}^*)$	$f\,':x\longmapsto-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f:x\longmapsto \mathrm{e}^x$	$f\,':x\longmapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

Toute fonction **polynôme** est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction **rationnelle** (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition.

Opérations sur les fonctions dérivables :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I et k un réel , alors :

- Les fonctions $k\cdot u$, $u+v$ et $u\cdot v$ sont dérivables sur I et:

$$(k\cdot u)\,'=k\cdot u\,' \quad , \quad (u+v)\,'=u\,'+v\,' \quad \text{et} \quad \boldsymbol{(u\cdot v)\,'=u\,'\cdot v+u\cdot v\,'}$$

- Si pour tout réel a de I, $v(a)\neq 0$, les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur I et:

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v\,'}{v^2} \quad , \quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u\,'\cdot v-v\,'\cdot u}{v^2}$$

Composées :

Fonction f	**Fonction dérivée $f\,'$**	**Ensemble de dérivabilité**
$f:x\longmapsto g(ax+b)$	$f\,':x\longmapsto a\,g\,'(ax+b)$	Si g une fonction dérivable sur un intervalle I , alors pour tout réel x , tel que $ax+b\in I$, la fonction f est dérivable sur I
$f:x\longmapsto\sqrt{u(x)}$	$f\,':x\longmapsto\dfrac{u\,'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	Si u est une fonction **strictement positive** et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction f est dérivable sur I
$f:x\longmapsto(u(x))^2$	$f\,':x\longmapsto 2u\,'(x)u(x)$	Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction f est dérivable sur I .
$f:x\longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$	$f\,':x\longmapsto u\,'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$	Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors la fonction f est dérivable sur I .